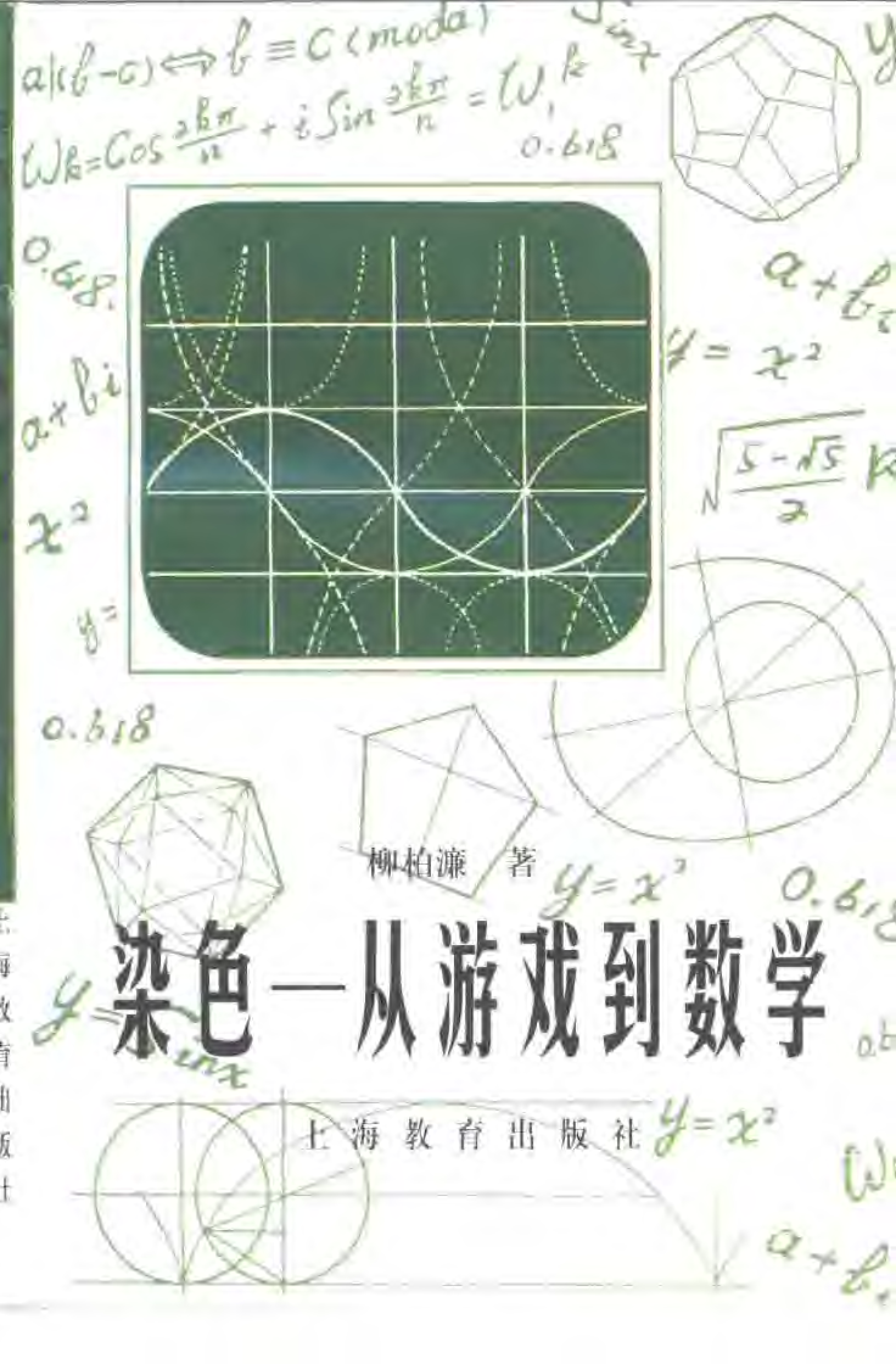


柳柏濂 著
染色—从游戏到数学
上海教育出版社





责任编辑　王耀东







ISBN 7-5320-6763-7/G・6919

定　　价:4.50 元

染色——从游戏到数学

柳 柏 濂 著

上 海 教 育 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

染色：从游戏到数学 / 柳柏濂著. —上海：上海教育出版社，2000.4
ISBN 7-5320-6763-7

Ⅰ.染...　Ⅱ.柳...　Ⅲ.数学-青少年读物
Ⅳ.01-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第16727号

染色——从游戏到数学
柳 柏 濂 著
上海世纪出版集团
上 海 教 育 出 版 社 出版发行
（上海永福路123号　　邮政编码：200031）
各地新华书店经销　　上海商务联西印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 3.75　字数 77,000
2000年6月第1版　　2000年6月第1次印刷
印数 1—5,100本
ISBN 7-5320-6763-7/G·6919　定价：4.50元

内 容 提 要

本书从介绍染色的游戏入手,导出了数学中著名的拉姆赛理论,四色猜想及其相关问题、在游戏中引入数学,在探索中深入问题,在数学史中阐述理论的发展,在数学家的贡献中介绍解题的思路.使读者沿着数学家跋涉的足迹去学习数学的思维,体会创造的艰辛和分享成功的喜悦.

本书内容生动,材料充实,文字流畅,故事性强.既有世界著名问题的探索,又有数学家的奇闻轶事,是一本知识性、趣味性较强的高中学生课外读物,也是数学教师开展课外活动的较好的参考书.

写在前面

记不得哪位诗人说过:"没有色彩便没有生命."

我们的世界是一个色彩斑斓的世界."日出江花红胜火,春来江水绿如蓝","百紫千红花正乱","万里黄河绕黑山"……

从我们懂得拿笔涂画的那一天开始,就学习着驾驭各种颜色.染色,是我们试图描绘周围世界的第一步.

不仅仅是美术才需要染色.既然我们的世界五光十色,反映和描述这一世界的一切科学,也需要染色.地图需要染色,化学指示剂需要显色,物理需要色谱,生物需要染色体,……

而数学呢?形形色色的染色问题需要数学给予定量的回答.数学家从平凡的游戏中找到不平凡的结论,从没有路的地方开拓出一条路.

拿着两支彩笔,在纸面上做一个游戏,这是一个多么有趣的竞争.可是,在数学家眼中,它却意味着一种对象的分类.数学家就要在这眼花缭乱的色彩中理出一条规律.从特殊中发现一般,从无序中看出有序.

从染色游戏到数学理论,经历着一个漫长的探索过程.在我们这本小书里,有数学名题解决的思路,有数学家长途跋涉的艰辛,有成功的欢乐,也有失败的教训.

不要以为,数学家也喜欢涂色抹彩.染色,往往是一些数学命题最简明的表达,最准确的刻画.

不要以为,数学家拿起彩笔在信手涂鸦,仅仅在讲述一些

连小学生也频频点头的趣事.也许,他正在阐述一道连他自己也无法解决的数学难题.

学习数学,不但要知道结论,更重要的要懂得方法.读者将会在本书有趣的问题中,加深领会著名数学家和数学教育家波利亚(G.Pólya)的名言:“能用一次的想法只不过是一个窍门,能用一次以上的想法就成为一种方法了.”

染色,从游戏到数学.在这里,你将从一个窗口看到一个色彩缤纷的数学世界.

目　　录

§1 不仅仅是游戏！

我们都玩过一种最简单的棋，叫做九子棋. 在地面上划两组平行线，组成一个每边三个方格的方格网. 两个游戏者分别将×和○填入方格中，最先使自己填入的×(或○)成一直线者便获得胜利.

因为局面太简单，这不能引起人们多大的兴趣. 更令人遗憾的是，它可能出现平局的情形，如图1-1所示.

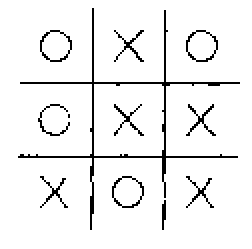


图 1-1

也许，下面的游戏会令人更刺激些.

在地面上定出6个点，当然，不要让任意三点在一直线上. 为了保证这一点，我们只要把6点看成正六边形的6个顶点就行了.

两个游戏者每次可随意选用红或蓝色的粉笔，轮流选择其中的两点连线，谁第一个被迫画成一个同色的三角形(红色或蓝色的)，他就是失败者. 当然，我们所说的三角形，它的三个顶点必须是6个点中的三个.

于是，在游戏中，你必须既要小心翼翼地避免画成一个同色三角形，又要使对手陷入不得不画出同色三角形的"陷阱"中.

也许有人问：这个游戏是否会出现平局的情形？我们的回答是：它决不会出现不分胜负的局面. 也就是说：必有一个游戏者会被迫画出一个同色三角形来.

为什么？

用试验方法说明吗？不行！这个工作太繁重了. 你看，6

个点之间一共有15条线段(我们把这些线段叫做“边”).每条边可以染两种颜色中的一种,于是染色的方法一共有 $2^{15}=32768$ 个.要检查这么多种情况都将出现同色三角形,才能得出我们的结论.这种方法既不实用,也令人生厌.

让我们看看一个逻辑推理的方法,它是如何把结论证明出来的.

我们需要证明的是:把6个点的连线染两色,至少会出现一个同色的三角形.

我们任取一点,称为 A,那么由 A 引出的5条边中,至少有3条是同色的.不妨设有3条边 AB,AC,AD 是红色边,如图1-2所示.

现在,我们考察 B,C,D 三点之间的边.若 BC,CD,DB 三边至少有一条红边,则与 A 就至少形成一个红边三角形.若 BC,CD,DB 三边都不是红边,则三角形 BCD 为蓝色三角形.

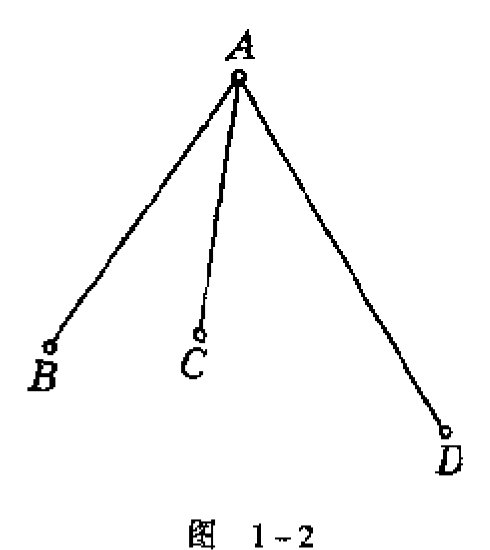


图 1-2

证明的思路是如此清晰,让人不得不惊叹数学逻辑推理的威力!

这样一个简单的数学游戏,还可以转化为一个生活中的真理:

“任何六个人的集会上,或者有三个人彼此相识,或者有三个人彼此不相识.”

1958年,《美国数学月刊》(6/7月号,问题 $E1321$)把上述结论的证明作为一道数学竞赛题,至今流传极广.

如果把6个人看作是6个点,两人彼此相识,就在相应两

点连红边，彼此不相识则连蓝边，于是“六人集会”问题就变成我们的染色游戏中必出现同色三角形的问题.

实际问题，数学模型，逻辑推理如此巧妙地结合在一起，怪不得美国数学家斯彭塞(J.Spencer)在回忆起中学时代第一次接触这个问题时的情景：“此论证之简单扼要，当时使我非常欣喜，至今依然如此.”

§2 少一点都不行

上面谈到的染色游戏，我们一开始定出了 6 个点，那么自然会问：如果用 5 个点，并且用红，蓝两种颜色去染它们的边，是不是游戏也一样能不出现平局呢？

5 个点不行！

为了说明我们的结论，只须举出一个例子：把 5 个点所产生的 10 条边染成红或蓝边后，不出现一个同色的三角形.

请看图 2－1. 若把粗实线看成是红线，细实线看成是蓝线，我们便找不出一个同色的三角形.

也就是说，如果用 5 点做我们的染色游戏，这时候，两个人有可能不分胜负.

于是，用一个例子否定了用 5 个点做游戏的可能性. 在数学上，这种方法称为举反例.

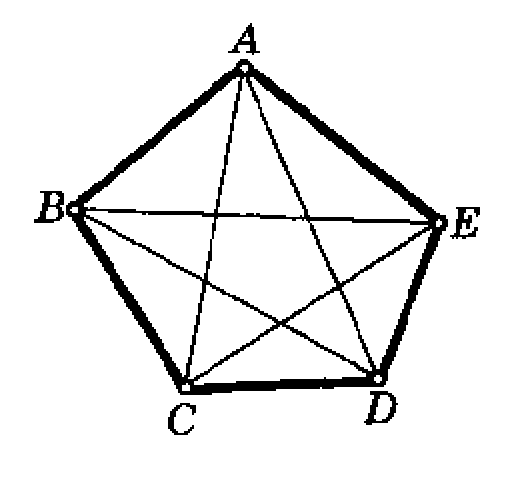


图 2－1

当然，我们还可以深入地问下去：当我们用 5 个点做染色游戏时，除了图 2－1 的情况外，还有没有其他情形会不出现同色三角形呢？

请你用红，蓝色的笔在一张纸上画画看.

尽管你可以画出其他不出现同色三角形的情形（图 2－2），但是，这些图与图 2－1 在“本质”上是相同的，只不过在某些位置上扭曲了而已. 我们所说的“本质”，就是指：图

2－1是由一个红五边形和蓝五边形(把它摊开来看)组成的，而图2－2也是由一个红五边形和蓝五边形组成的，我们称图2－1和图2－2是两个同构的图.

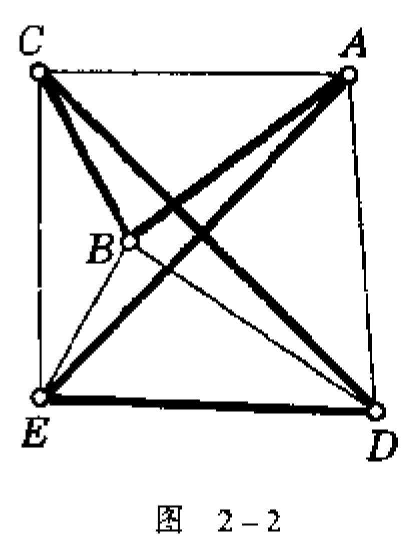


图 2－2

两个同构的图，我们把它看成是一样的. 当然，这里所谈的图只考虑两点之间有，还是没有线相连，而不理会这些线的长度及曲直. 这一点与平面几何中的图是不同的.

经过了一番试画以后，我们是不是能下结论：5 点的染色游戏，不出现同色三角形的情形只有图2－1一种呢？

除非你把所有的情形都做过了——它一共有 $2^{10}=1024$ 种——否则，这个结论是不能令人信服的，顶多只能称为猜想.

现在，我们用逻辑推理的方法来证明这个猜想是正确的.

我们翻回到§1中6点染色游戏证明时用过的图1－2，就可以知道：只要有一点引出3条同色的边，就必出现红或蓝色的三角形. 于是，要不出现同色三角形，每点引出的同色边至多是两条.

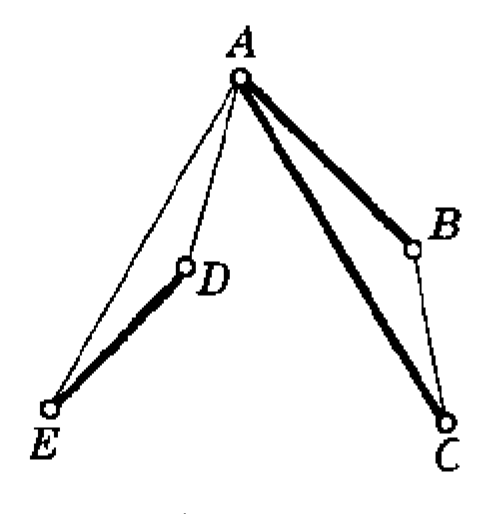


图 2－3

我们在5点中任取一点称为 A，则由上面分析可知，A 只能引出2条红边和两条蓝边. 如图2－3所示. 设两条红边是 AB，AC，

两条蓝边是 AD,AE.

因图中不出现同色三角形,故 DE 边必为红边,而 BC 边必为蓝边. 以 A 为中心,如果不考虑$\triangle ADE$ 与$\triangle ACB$ 的大小,那么这两个三角形的红蓝边是反对称的——即以 A 为中心,红边与蓝边对称.

因从 C 引出的边已有一红一蓝,还需引出一红一蓝边,因为上述的反对称性,可随意选择 CD, CE,其一为红边,另一为蓝边.不妨按图 2-4 进行选择.

于是,由 D 点引出的另一条边 DB 必须染红色,而 BE 必须染蓝色.请读者自己把这两边在图 2-4 中添上去,便得到一个和图 2-1 同构的图.它也是由两个颜色分别是红和蓝的五边形组成.

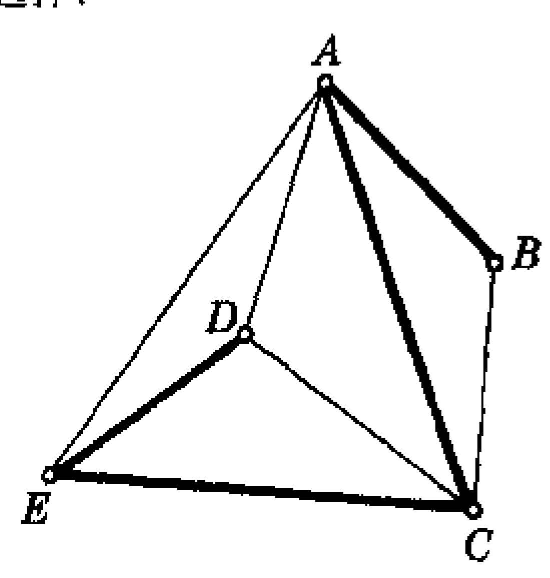


图 2-4

上面的每一步都是由严格的逻辑推理得来的.因此,我们便证明了:

五点染色游戏中,只有如图 2-1 的唯一情形不出现同色三角形. (2·1)

上面的证明是构造性的.我们还可以用计算方法给予一个更简单的证明:由 § 1 的论证,见图 1-2 可知,要图中不出现同色三角形,每个顶点引出的同色的边不能多于两条.因此,在五个点的情形中,由每个点引出的红,蓝边恰好各是两条,这样红边(或蓝边)只能构成一个圈或几个圈.由于我们的染色不能出现重边(即两个点之间有一条以上的边),因此红边(或蓝边)只能构成一个圈,这就是红(蓝)五边形.也即图

2－1.

(2·1)的结论也可以换一个说法，表述为下列等价命题：

在五点染色的游戏中，或者必出现一个同色三角形，或者必出现一个同色五边形.

§3 拉姆赛的发现

1928年,在英国伦敦数学会的一次学术会议上,年仅24岁的年青数学家弗兰克·普拉东·拉姆赛(Frank Plumpton Ramsey)登上了讲坛,他宣读了一篇题为《论形式逻辑中的一个问题》的论文.



拉姆赛(1903~1930)

他证明了一个定理:如果某一集合(如点集)中事物的数量足够多,且每对事物间都存在一定数量的关系(如各种颜色的边)中的一种,那么必定存在一个包含若干数目事物的子集(如三点集),其中每对事物间也存在同样的关系(如同色三角形).

拉姆赛宣读完论文,会场上响起了热烈的掌声.拉姆赛的定理的条件是如此一般,数学家们意识到:一条刻画客观世界一般规律的定理诞生了.

上述的定理称为拉姆赛定理.

让我们用§1,§2中叙述的特例来说明一下拉姆赛定理.

拉姆赛定理告诉我们:如果平面上的点数足够多,且每对点间的线(边)或染红色或染蓝色,那么必定存在一个包含3

个点的子集，它们之间的边都同色，即包含一个同色的三角形.

由§1，§2中的叙述我们知道：上面所说的"如果平面上的点数足够多"，是指6个点就足够了.而5个点不行.6就是染两色游戏中，必出现一个同色三角形的至少点数，我们称它为染两色出现同色三角形的拉姆赛数.

为了方便叙述，我们把平面上有 n 个点，每两点都有连线的图称为 n 阶完全图，记作 K_n. 显然，每个 K_n 一共有 C_n^2 条边.下面是1到6个点的完全图.

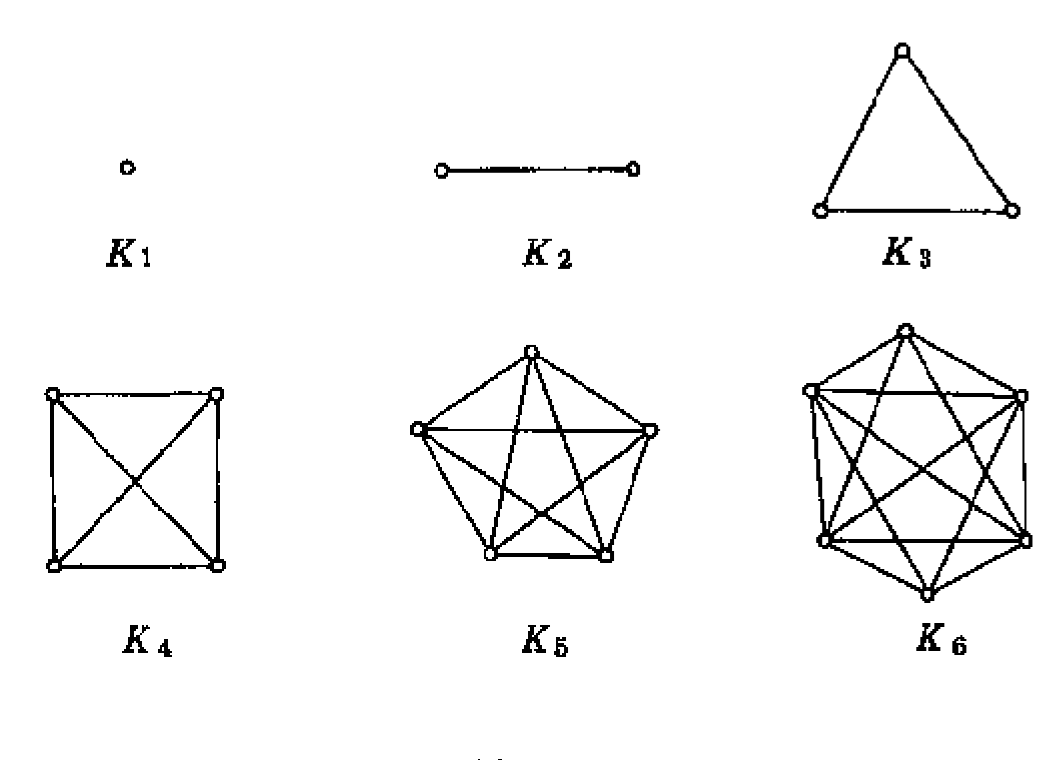


图 3-1

于是，我们可以说，若把边染红，蓝两色，要出现一个红 K_3 或一个蓝 K_3，至少要有6个点.故这个拉姆赛数可记为 $R(K_3, K_3)=6$.

同理，我们不难理解 $R(K_3, K_4)$，$R(K_3, K_5)$，$R(K_3, K_6)$，

$R(K_4,K_4)$，$R(K_3,K_3,K_3)$等的含义．例如 $R(K_3,K_6)$就是把边染红，蓝两色，要出现一个红 K_3 或蓝 K_6，至少需要的点数．而 $R(K_3,K_3,K_3)$是用红，蓝，白三色染边，出现一个同色三角形，所需要的至少点数．

请注意：拉姆赛定理仅仅告诉我们，上述那些 $R(K_3,K_3)$，$R(K_3,K_4)$，……必定存在，但是，它没有告诉我们这些数是多少，也没有告诉我们，怎样去求出它们．

让我们回忆一下，如何求 $R(K_3,K_3)=6$．

在§1中，我们证明了：6个点的染色游戏，必出现一个同色三角形．于是，即证明了 $R(K_3,K_3)$的上界

$$R(K_3,K_3)\leqslant 6. \tag{3·1}$$

在§2中，我们举出了一个5个点的图(图2－1)，它的边染两色，但不存在同色三角形．这种不出现我们所需图形的阶数最大的图称为拉姆赛数的临界图．临界图2－1表明了 $R(K_3,K_3)$的下界：

$$R(K_3,K_3)\geqslant 6. \tag{3·2}$$

即 $R(K_3,K_3)>5$，于是，由(3·1)和(3·2)式合起来，就得到结论 $R(K_3,K_3)=6$．

用这种方法，我们探索 $R(K_3,K_4)$．

先证明 $R(K_3,K_4)\leqslant 9$，即证明：平面上9个点，用红，蓝两色任意连边，必出现一个红 K_3 或一个蓝 K_4．

在9个点中的某一点若用4条红边连另外4个点，则仿照§1的思路，必出现一个红 K_3 或一个蓝 K_4．于是，每个点引出的红边数至多有3条，但不能每点引出的红边数都恰有3条，否则整个图的红边数是$\frac{9\times 3}{2}$，不是整数！因此至少有一点，设为 A，引出的红边数$\leqslant 2$．即 A 引出的蓝边至少有6条，

设与 A 用蓝边相连的 6 个顶点为$\{x_1,x_2,\cdots,x_6\}$. 根据 §1, §2 的结果 $R(K_3,K_3)=6$, 此 6 点 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 之间的边染红, 蓝两色, 必出现一个红 K_3, 或蓝 K_3, 若是后者, 它与 A 引出的 6 条蓝边便构成蓝 K_4. 于是, 便证得了 $R(K_3,K_4)\leqslant 9$.

下面, 我们举出一个 8 个点的临界图(图 3－2), 它染红(粗线), 蓝(细线)两色, 但既不含红 K_3, 也不含蓝 K_4, 这表明 $R(K_3,K_4)\geqslant 9$.

图 3－2

于是, 便得到 $R(K_3,K_4)=9$.

现在, 我们已经知道了求拉姆赛数的常规方法. 请不要以为, 这种方法是通行无阻的. 目前, 我们只能求出的只有 8 个拉姆赛数:

$R(K_3,K_3)=6$,

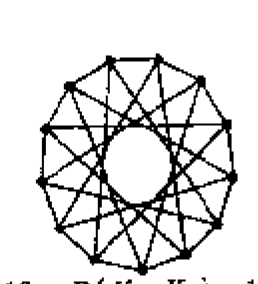
$R(K_3,K_4)=9$, $R(K_3,K_5)=14$,

$R(K_4,K_4)=18$, $R(K_3,K_6)=18$, $R(K_3,K_7)=23$,

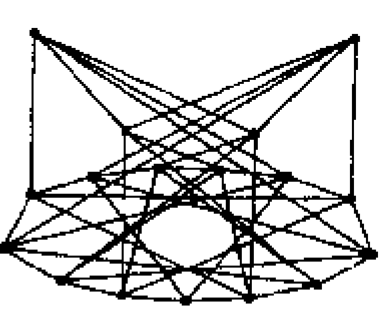
$R(K_3,K_9)=36$, $R(K_3,K_8)=28$.

上面最后一个数是 1990 年通过计算机的运算才确定下来的.

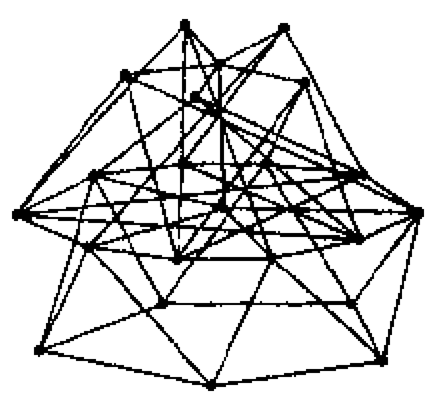
求拉姆赛数的困难所在是: 用证明的方法求它的上界固然不易, 而用举反例的方法导出它的下界也是非常困难的. 要知道, 构作一个拉姆赛的临界图需要一些巧妙的构思. 请看上述 8 个拉姆赛数的临界图. 为方便观察, 我们在图中仅画出红边, 即两点之间未连的边是蓝边. $R(K_3,K_3)$, $R(K_3,K_4)$的临界图见图 2－1, 图 3－2.



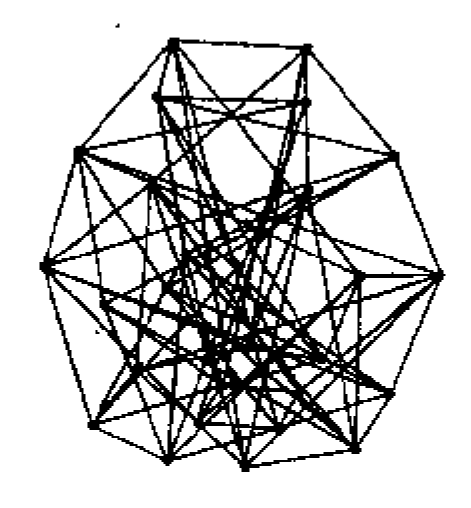
$13 < R(K_3, K_5) = 14$



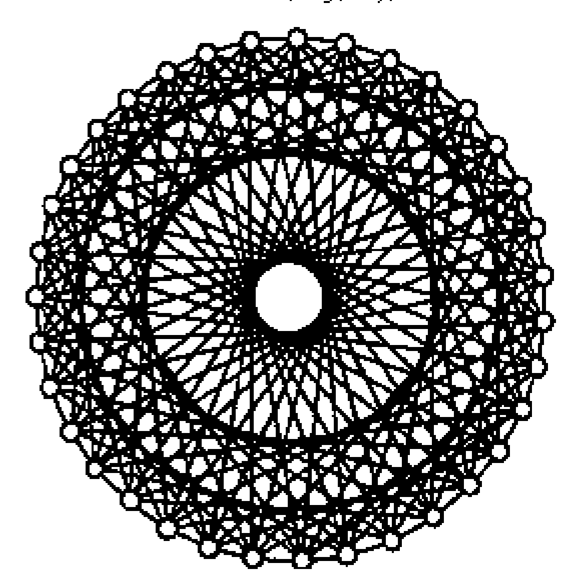
$17 < R(K_3, K_6) = 18$



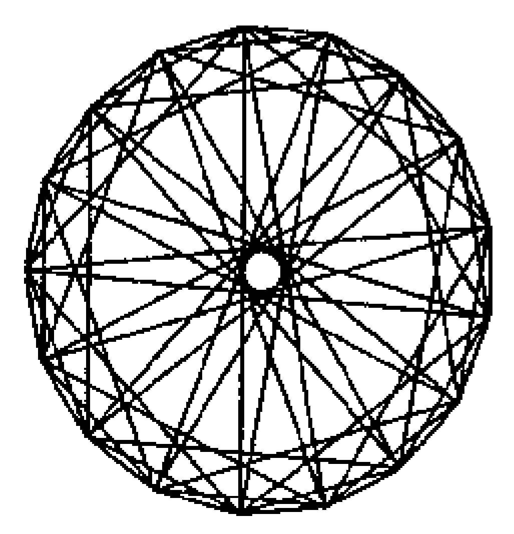
$22 < R(K_3, K_7) = 23$



$27 < R(K_3, K_8) = 28$



$35 < R(K_3, K_9) = 36$



$17 < R(K_4, K_4) = 18$

图　3－3

寻求拉姆赛数是对人类智慧的挑战，例如对 $R(K_4,K_5)$，人们虽然已经知道 $25<R(K_4,K_5)\leq 27$. 但是，迄今还没有办法求得它的精确值.

对于计算拉姆赛数的困难程度，当代著名的数学家厄尔多斯(P. Erdös)有一个十分精彩的比喻故事："一群外星人侵入地球，并威胁说如果地球人不能在一年内找到 $R(K_5,K_5)$，他们就要把地球铲平. 此时人类必须动员地球上最杰出的学者并使用速度最快的计算机，才有可能在一年内解决这个问题，使人类免遭灭顶之灾. 然而，如果外星人要求 $R(K_6,K_6)$，那么我们除了对这批入侵者发动先发制人的打击外，别无其他任何的选择."

七十年前，拉姆赛的 20 页的论文证明了拉姆赛数的存在，又给全世界的数学家出了一道求拉姆赛数的难题.

拉姆赛是 20 世纪初一位优秀的数学家. 他的父亲亚瑟·S·拉姆赛是一位数学教授，英国剑桥马格德林学院的院长. 1925 年，21 岁的拉姆赛作为剑桥大学的数学尖子从该大学毕业，从事经济学的研究. 他发表在《经济学杂志》上的两篇论文《对征税理论的一点贡献》和《储蓄的一种数学理论》是当今经济学中的最优征税和最优积累两个分支的奠基性文献，被誉为"数学经济学所取得的杰出的成就之一". 此外，拉姆赛在哲学，概率论，逻辑学，数学哲学方面都有很多独创性的工作. 在研究数学的逻辑基础中，他发现并证明了被当代数学家用他的名字命名的定理. 不幸的是，在定理诞生后两年，即 1930 年，拉姆赛便突然病倒，并死于因腹部外科手术所引起的并发症. 当时他仅有 26 岁.

英国剑桥大学的 D·H·梅勒(D. H. Mellor)在悼念拉姆赛逝世五十周年的文章中写道：拉姆赛不爱争论，他的文章不爱

用行话，不矫揉造作，以致使人在试图自己去思索其所说内容之前往往低估了它.

人们没有想到，拉姆赛定理开创了一门新的数学理论——拉姆赛理论. 它涉及从宇宙星星的分布到通讯网络和信息传输与检索系统. 研究拉姆赛理论的数学家们还发现了一些直到下一世纪仍有指导作用的数学知识.

数学家们宣称：拉姆赛定理表明，完全的无序是不可能的.

这不仅是数学，而且是哲学的真谛.

§4 厄尔多斯抛硬币

从前面的叙述中，我们看到，求 $R(K_m, K_n)$ 的较好的上界和下界，用两边夹的方法，就能得到 $R(K_m, K_n)$ 的准确值.

可是，上述求界的方法并不容易，致使得到的 $R(K_m, K_n)$ 数寥寥无几.

那么，能否用另外一些方法，求出拉姆赛数哪怕是粗略一些的上界和下界，以使我们对 $R(K_m, K_n)$ 的大小有一个大致的估计呢?

下面是匈牙利数学家厄尔多斯和赛克尔斯(Szekeres)得出的一个上界公式.

对任意给定的正整数 $m, n \geqslant 3$，有不等式

$$R(K_m, K_n) \leqslant R(K_{m-1}, K_n) + R(K_m, K_{n-1}). \quad (4\cdot1)$$

我们用中学教材中的数学归纳法证明(4·1)式，归纳法对 $m+n$ 进行.

证明：1. 当 $m+n=6$ 时，即 $m=n=3$，只须证

$$R(K_3, K_3) \leqslant R(K_2, K_3) + R(K_3, K_2). \quad (4\cdot2)$$

我们已知道：$R(K_3, K_3)=6$. 而 $R(K_2, K_3)$ 的意义是：求这样的完全图的最小阶数，当它的边任染红或蓝色时，必出现一条红边或出现一个蓝三角形. 易见 $R(K_2, K_3)=3$. 同理，$R(K_3, K_2)=3$. 于是，可证得(4·2)成立.

2. 考察 $m+n \geqslant 6$ 的情形.

假设 $6 \leqslant m+n < p$（p 是正整数）时(4·1)成立. 我们将证明，当 $m+n=p$ 时(4·1)也成立.

为方便起见，把(4·1)式的右边记作 f，即

$$f=R(K_{m-1},K_n)+R(K_m,K_{n-1}). \qquad (4·3)$$

于是，我们只须证明与(4·1)等价的下列命题：

把完全图 K_f 的每边染红或蓝色，K_f 必出现一个红色的 K_m 或蓝色的 K_n. (4·4)

在 K_f 中任取一点，记为 A，则与 A 相连的边共有 $f-1$ 条，由(4·3)式及抽屉原理可知，这 $f-1$ 条边中

或至少有 $R(K_{m-1},K_n)$条红边， (i)

或至少有 $R(K_m,K_{n-1})$条蓝边. (ii)

对于情形(i)，记 $f_1=R(K_{m-1},K_n)$，则在完全图 K_{f_1}中，由归纳假设，必出现红色的 K_{m-1}或蓝色的 K_n. 对于前一种情形.红色的 K_{m-1}和与之相连的 A 的 $m-1$ 条红边（易见 $f_1\geq m-1$）便得到一个红的 K_m，于是，结论(4·4)成立.

对于情形(ii)，类似于上面的论证，亦可知，完全图 K_f 满足(4·4).

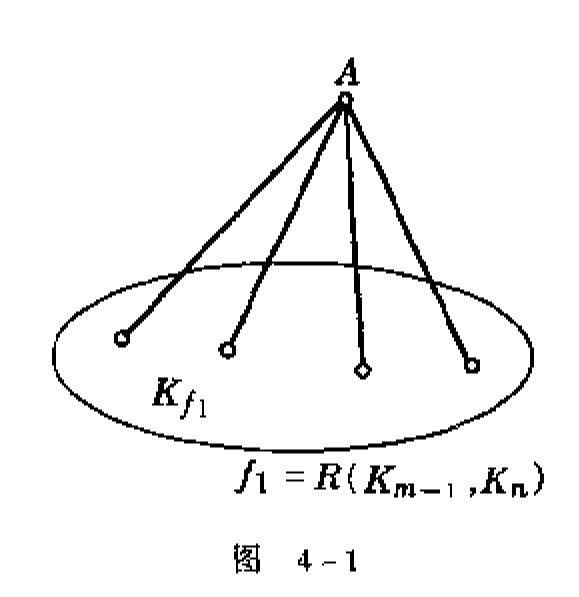


图 4-1

于是，我们便用数学归纳法证得(4·1)式.

(4·1)式通常称为拉姆赛数的厄尔多斯－赛克尔斯上界. 这是两位匈牙利数学家在 1935 年发现的，当时，他们并不知道在七年前拉姆赛已证明了这一定理(拉姆赛的论文在 1930 年才发表). 可是，厄尔多斯和赛克尔斯的高明之处就在于：在他们证明的不等式中，不仅可以断言拉姆赛数的存在（这是拉姆赛所做过的），而且以定量的形式给出了拉姆赛数的一个上界.

利用厄尔多斯－赛克尔斯上界，我们用数学归纳法不难证出下列公式

$$R(K_m,K_n)\leqslant C_{m+n-2}^{m-1}. \qquad (4\cdot5)$$

证明：对 $m+n$ 用数学归纳法.

当 $m+n\leqslant5$ 时，可以直接验证(4·5)，略.

设(4·5)对所有 $m,n,5\leqslant m+n<k+l$ 成立. 现证明，对 $k+l$ 也成立. 由厄尔多斯－赛克尔斯上界公式即(4·1)和归纳假设

$$\begin{aligned}R(K_k,K_l)&\leqslant R(K_{k-1},K_l)+R(K_k,K_{l-1})\\&\leqslant C_{k+l-3}^{k-2}+C_{k+l-3}^{k-1}\\&=C_{k+l-2}^{k-1}.\end{aligned}$$

这便证得了不等式(4·5).

运用厄尔多斯－赛克尔斯的上界公式，我们可以考察 $R(K_3,K_5)$，得到

$$\begin{aligned}R(K_3,K_5)&\leqslant R(K_2,K_5)+R(K_3,K_4)\\&=5+9=14.\end{aligned}$$

再结合 $R(K_3,K_5)$的临界图(图 3－3)有 13 个顶点，于是，便得到 $R(K_3,K_5)=14$.

现在，我们转而考虑 $R(K_m,K_n)$的下界. 如在§3 所看到的：求 $R(K_m,K_n)$的下界，我们只能依赖于临界图. 然而，要作出一个拉姆赛数的临界图是颇具匠心的.

1947 年，厄尔多斯提出可以用一种不寻常的方法——抛硬币——来确定任何一个拉姆赛数的下界. 他作了一个假想实验. 在这个实验中，他按照抛硬币的结果对 K_p 的每条边着色，如果抛硬币的结果是“正面”，则染红色，“反面”则染蓝色. 然后，他试图证明某个特定的拉姆赛数，如 $R(K_{34},K_{34})$大于

一百万，即用这种随机的实验染色法，证明 K_{10^6}不存在红色的 K_{34}，或蓝色的 K_{34}，实验便成功，即 $R(K_{34},K_{34})>10^6$.

我们不打算用冗长的计算重复厄尔多斯的实验，但是运用他的思想——即数学中的概率思想——我们可以叙述厄尔多斯得到的下面一个成果.

$$\text{当 } m\geqslant 2 \text{ 时}, R(K_m,K_m)\geqslant 2^{\frac{m}{2}}. \qquad (4\cdot 6)$$

厄尔多斯"抛硬币"的方法，对(4·6)的证明是这样的：

$m=2$，(4·6)可直接验证，略. 不妨设 $m\geqslant 3$.

考虑一个 p 阶完全图 K_p(顶点是有标号的).

硬币无论怎样抛，K_p 的边染两种色(红，蓝)，一共可以染出不同的有色 K_p 共 $N=2^{C_p^2}$个(因 K_p 有 C_p^2 边，每边染色有两种选择).

我们计算一下，在 N 个有色 K_p 中，含红色 K_m 的究竟可能有多少个.

在 p 个点中选 m 个点，选法有 C_p^m，选出的 m 个点所成的 K_m 染成红色，余下的边还有 $C_p^2-C_m^2$ 条，这些边的染色都有两种选择，于是在选定 m 个点后可生成 $2^{C_p^2-C_m^2}$种不同的含红色 K_m 的有色图 K_p，这样在有色 K_p 中，含红色 K_m 的图有 $C_p^m\cdot 2^{C_p^2-C_m^2}$个.

同理，可知在有色 K_p 中，含蓝色 K_m 的图也有 $C_p^m\cdot 2^{C_p^2-C_m^2}$个.

于是，有色的完全图 K_p 中，含有同色 K_m 的图有

$$N_0=2\cdot C_p^m\cdot 2^{C_p^2-C_m^2}=C_p^m\cdot 2^{C_p^2-C_m^2+1}\text{个}.$$

现在，我们考虑 $p<2^{\frac{m}{2}}$的情形，即 K_p 的点数小于 $2^{\frac{m}{2}}$个.

因为

$$\frac{N_0}{N}=\frac{C_p^m\cdot 2^{C_p^2-C_m^2+1}}{2^{C_p^2}}=C_p^m\cdot 2^{-C_m^2+1}$$

$$=\frac{P_p^m}{m!}2^{-C_m^2+1}<\frac{p^m}{m!}2^{-C_m^2+1}$$

$$<\frac{1}{m!}2^{\frac{m^2}{2}-C_m^2+1}\qquad(\text{因 } p<2^{\frac{m}{2}})$$

$$=\frac{1}{m!}2^{\frac{m}{2}+1}<1.$$

由上面结果知道，$N-N_0>0$. 因为 N 和 N_0 都是整数，故 $N-N_0\geqslant 1$，即至少存在一个有色的 K_p 不含同色的 K_m. 于是，我们便证明了

$$R(K_m,K_m)\geqslant 2^{\frac{m}{2}}.$$

对于 $R(K_m,K_n)$ 当 $m\neq n$ 的情形，我们记 m 和 n 的最小的一个 $\min(m,n)=r$，显然有

$$R(K_m,K_n)\geqslant R(K_r,K_r)\geqslant 2^{\frac{r}{2}}.\qquad(4\cdot 7)$$

当然，上面给出的界是粗略的. 但是，它给出了拉姆赛数的一种估计值，使我们不致于在茫茫的数海中漫无边际地寻觅. 更重要的是，我们看到了著名数学家厄尔多斯独特的数学思维.

厄尔多斯 1913 年生于匈牙利的布达佩斯，父母都是中学数学教师. 他可以称得上是一个数学神童，4 岁时就发现了负数，他回忆道："我告诉母亲，如果你从一百里取出二百五十，就得到负一百五十."

厄尔多斯是当代最伟大的数学家之一. 1983 年，他由于



金的多少反映出问题困难的程度.今天,人们把解决一个厄尔多斯问题看成比得到奖金更大的荣誉.

1996年9月20日,83岁的厄尔多斯在波兰华沙的一次数学会议上,由于心脏病发作逝世.全世界的数学家沉痛地悼念这位"数学界的莫扎特"和"现代的欧拉".

§5　数学家“贪得无厌”

拉姆赛告诉我们:用红和蓝分别染一个 K_6 的边,必然会出现一个同色的三角形.

当我们拿着红,蓝色的笔染完一个 K_6 后,在红蓝交映的网中得出一个同色三角形的时候,我们会发现:可以“抓”到两个同色三角形.

这是偶然的吗?

实验了多次仍是如此.

于是,数学家显得有些“贪得无厌”了.他们要证明:这是必然的——K_6 的边染两色,至少出现两个同色三角形.

利用§1的结果,我们可以把证明叙述得相当简单.

设 K_6 的6个顶点为 A,B,C,D,E,F.由拉姆赛定理(见§1证明),把 K_6 的边染红,蓝两色,必出现一个同色三角形,不妨设这个三角形是红色的 $\triangle BEF$(图5-1).

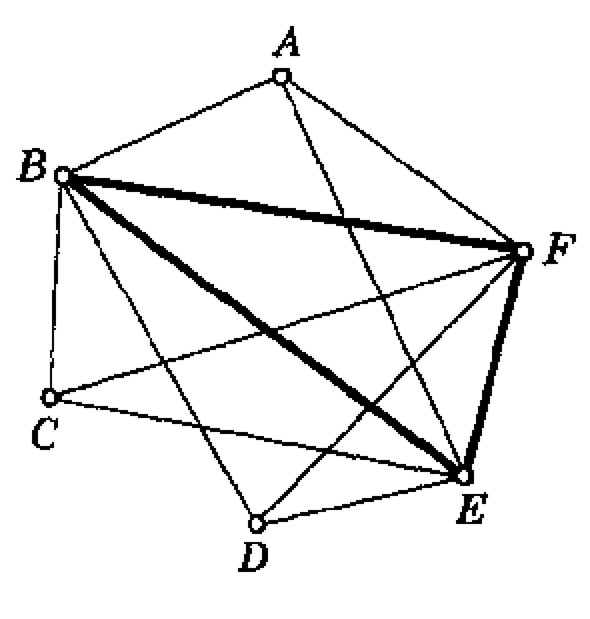


图　5-1

现考虑 $\triangle BEF$ 以外的点 A,C,D.

由 A 引出的五条边中至少有3条同色,除了 A 与 B,E,F 三点所连的边是蓝色的情况

外(图 5-1),其余情形均可用§1的方法得到另一个同色三角形(显然,此三角形不是△BEF).

同理,对点 C,D 引出的边也有同样的结论.于是,便如图 5-1 的情形,即剩下考虑 A,C,D 与△BEF 的三顶点连线均是蓝边的情形.

这时,注意点 A,C,D 所成的三角形,它必是红三角形,否则(即△ACD 至少有一蓝边)便与原来的蓝边形成一个蓝色三角形.

于是,我们便完成了这一结论的证明,即 K_6 的边染两色,至少有两个同色三角形.

如果运用§2中关于 K_5 边染两色的结果,也可以简单地证明上述结论.读者不妨作一尝试.

人们自然会问:上述结论能否再“贪得无厌”些,改为“至少有 3 个同色三角形”呢?

不行!请看下面的两个染了两色的 K_6.

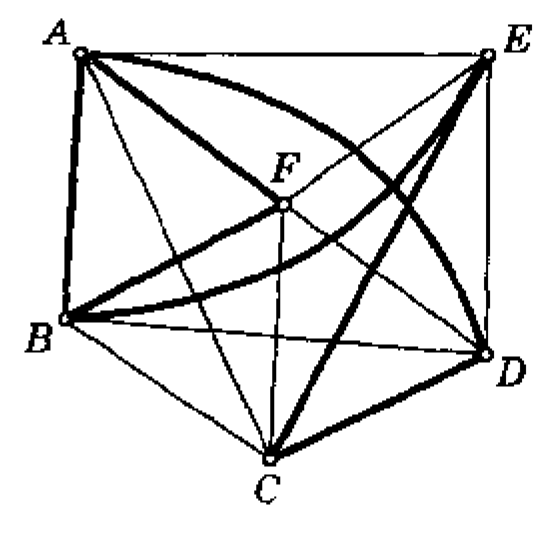


图 5-2

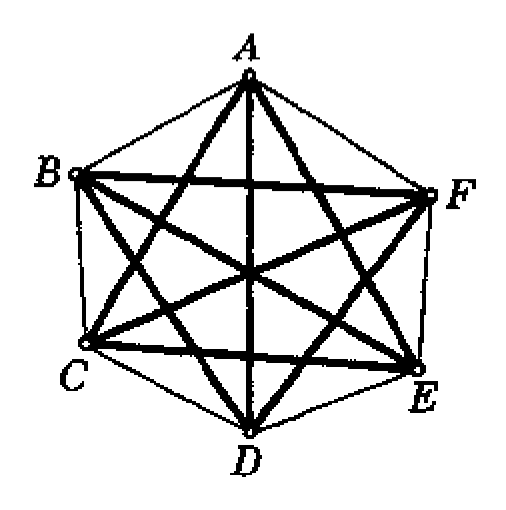


图 5-3

这两个染了两色的 K_6 都恰含有两个可由上述定理所证出来的同色三角形，它们称为极值色图. 其中图 5－2 的两个三角形是颜色不同的，而图 5－3 中的两个三角形都是同色的，后者称为无蓝着色，意思是蓝色三角形个数为零.

重温一下上述的证明，我们不难知道：若 K_6 染两色恰有两个不同色的三角形，它必然同构于图 5－2. 细看一下，红三角形 *ABF* 和蓝三角形 *EDF* 好像一个西装领结一样. 只有两个不同色三角形的 K_6，必然有一个这样的领结.

至此，我们仅讨论了 K_6 染两色的情形. 把问题继续深入下去，对于一般的 K_n 染两色，它又至少有多少个同色的三角形呢？

问题已经完全解决了. 1959 年，一个叫做“好人”的数学家——他的名字就叫古德曼（Goodman）——在《美国数学月刊》（The American Mathematical Monthly，1959，66 卷，9 期，778～783页）上证明了他的结论：

把 K_n 的边染两色，记 $\triangle_n$ 为出现的同色三角形的至少数目. 可得 $\triangle_n$ 的公式如下：

若 $n=2m$，则 $\triangle_n=\frac{1}{3}m(m-1)(m-2)$；

若 $n=4m+1$，则 $\triangle_n=\frac{2}{3}m(m-1)(4m+1)$；

若 $n=4m+3$，则 $\triangle_n=\frac{2}{3}m(m+1)(4m-1)$，

于是，我们可以按公式算出下列的表：

n	6	7	8	9	10	11	12	…
$\triangle_n$	2	4	8	12	20	28	40	…

按照古德曼的结果，我们当然都应该能作出（尽管不很容

易)含有$\triangle_n$个同色三角形的K_n.图 5－2 和图 5－3 也使我们提出这样的问题:是否对每个K_n的极值色图,必存在一种无蓝着色?

1961 年,数学家兰甫·沙维(Léopold Sauvé)给出了这个问题的肯定的回答.

在科学上,理论上证明了某一对象的存在并不等于就能不费力气地把它拿出来.正如我们证明了拉姆赛数的存在并不等于能求出拉姆赛数一样.现在,试考虑K_7的情形,由古德曼的公式,已算出$\triangle_7 = 4$,你能作出一个K_7的无蓝染色的极值色图吗?——沙维已经告诉我们,它是必定存在的!

请对照一下你的结果,它就是下面的图 5－4.

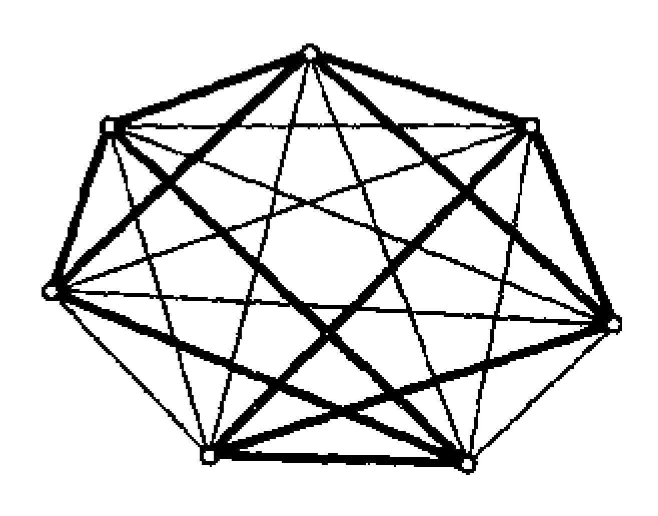


图　5－4

§6　航空公司的旅游圈

日本的数学家曾经提出过下面一个有趣的问题：

两个航空公司为10个城市通航，使得任意两个城市之间恰有一个公司开设直达航班的往返服务．那么我们可以断言：至少有一个公司能提供两个不相交的旅游圈，每圈可以游览奇数个城市．

在我们的眼前，千万不能仅出现一群飞来飞去的飞机．数学解决问题的第一步，是要把一些眼花缭乱的实际问题抽象为一个数学模型．

上述的问题，我们可以抽象为一个染色模型．它等价于：

把 K_{10}的每边染红色或蓝色，则必存在两个无公共顶点的同色奇圈，这里的奇圈是指顶点个数为奇数的圈．　(6·1)

读者不难看出，我们的等价命题中的顶点即为问题中的城市，两点之间的边即为往返航线，而红和蓝色的边分别是两个不同公司的航线．

运用我们叙述过的一些简单拉姆赛理论，可以证明命题(6·1)．

在完全图 K_{10}的10个顶点中取出6个点．由§1可知，此6点组成的 K_6 的边染两色至少有一个同色三角形，我们把它记为$\triangle A_1A_2A_3$．

在 K_{10}中，除了 A_1，A_2，A_3 外，还剩下7个点，它们所组成的 K_7 中也至少有一个同色三角形，记为$\triangle B_1B_2B_3$．

当然，$\triangle A_1A_2A_3$ 与$\triangle B_1B_2B_3$ 是没有公共点的，如果它

们同色，那么我们的结论(6·1)便成立了.

现在，我们仅需考虑$\triangle A_1A_2A_3$与$\triangle B_1B_2B_3$不同色的情形.

不妨设$\triangle A_1A_2A_3$是红色三角形，而$\triangle B_1B_2B_3$是蓝色三角形(图 6－1)，这两个三角形之间还有 9 条边 $A_1B_1,A_1B_2,A_1B_3,A_2B_1,A_2B_2,A_2B_3,A_3B_1,A_3B_2,A_3B_3$，这 9 条边染两种颜色，至少有 5 条边是同色的，不妨设有 5 条蓝边.

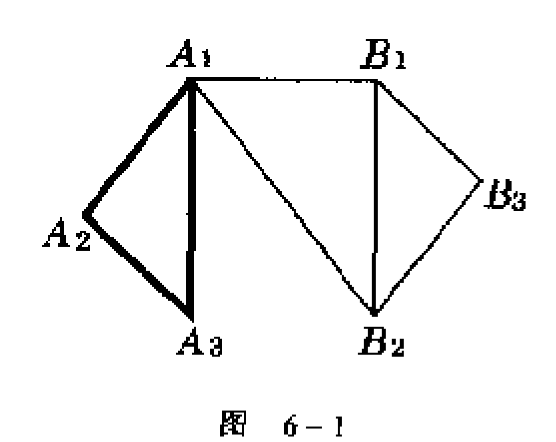


图 6－1

因此，在 A_1,A_2,A_3 中，至少有一个点，它引出两条蓝边，不妨设 A_1B_1，A_1B_2 是蓝边. 于是我们得到红色三角形 $A_1A_2A_3$ 和蓝色三角形 $A_1B_1B_2$(请注意：这两个不同色三角形是有一个公共点的. 我们的用意是：把原来占 6 个点的两个红，蓝三角形，改为取占 5 个点的红，蓝三角形).

于是，除了这两个红，蓝三角形($\triangle A_1A_2A_3$和$\triangle A_1B_1B_2$)外，还剩下 5 个点，我们把这 5 个点称为点 C_1,C_2,C_3,C_4,C_5(当中有一点曾经称为 B_3).

现在考虑 C_1,C_2,C_3,C_4,C_5 所成的 K_5，若它们中有同色三角形，则此三角形和$\triangle A_1A_2A_3$，$\triangle A_1B_1B_2$ 都无公共点，且必与其中之一同色. 命题(6·1)得证，若此 K_5 无同色三角形，

则由§2的结论，必有一个同色5边形(图2－1)，它也与$\triangle A_1A_2A_3$，$\triangle A_1B_1B_2$无公共点．于是，亦出现两个同色奇圈．

至此便证明了命题(6·1)，也就是解决了航空公司的旅游圈问题．

上面，我们仅用到了拉姆赛数$R(K_3,K_3)$和它的临界图，这是§1和§2所述及的最简单的拉姆赛理论．不要小看这一点简单的数学思想，运用它，我们可以解决一些“世界级”的数学竞赛题呢！

请看1992年7月15日在芬兰举行的第33届国际数学奥林匹克竞赛的一道试题：

给定空间中的9个点，其中任何4点都不共面．在每一对点之间都连有一条线段，这些线段可染为红色或蓝色，也可不染色．试求出最小的n值，使得将其中任意n条线段中的每一条任意地染为红蓝两色之一，在这n条线段的集合中都必然包含有一个各边同色的三角形．

我们一直都在讨论平面上的图形．乍看起来，这道题却是研究空间上的9个点．可是，从实质上看，它仍可看作一个平面上的图形问题，而所谓“任何4点都不共面”只不过是保证平面上的9个点中没有3点共线而已．

于是，问题归结为：在平面上有9个点，无3点共线，它们每两点之间连边，共有$C_9^2=\dfrac{9\times 8}{2}=36$条边，问至少取多少条边，把这些边任意染成红，蓝两色，就保证必出现一个同色三角形．

回想§1，§2中的解题思路——它们是求最小的点数——仍然适用于求最小的边数n．如果我们把9个点的图，取尽量多的边，使它能不含同色三角形，则我们便可得到n

的下界.这一点,跟我们求拉姆赛数的临界图的想法是一致的.

在§2中,我们知道,$R(K_3,K_3)$的临界图是如图2-1的5阶图.现在,我们要做的是9阶图,如果我们把图2-1中的四个顶点各分成两个顶点构造一个图 G,若原来图2-1中两点间连红线(蓝线),则图 G 中相应两组点之间也都连上红线(蓝线),如图6-2:

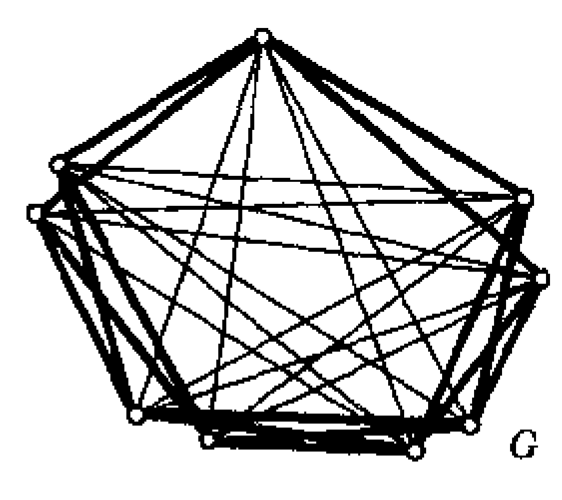


图 6-2

容易看到,G 中不存在任何同色三角形.我们来算算看,G 有多少条边.事实上,G 是 K_9 去掉4条边所组成,故 G 的边数是$\frac{9\times 8}{2}-4=32$.

于是,我们便证得:

$$n\geqslant 33. \qquad (6\cdot 2)$$

现在,我们试图证明:

$$n\leqslant 33. \qquad (6\cdot 3)$$

只须证明,在 K_9 中任意取33边所组成的图中,边染红、蓝两色,必存在一个同色三角形.

事实上,一个含 9 个顶点 33 边的图,只不过是在完全图 K_9 中(有 36 边)拿掉 3 边后剩下的图 H. 为了方便表达,我们下面只画出被拿掉的 3 边的各种情形,通常称为 H 的补图 $\overline{H}$.

$\overline{H}$ 的各种情形如下:

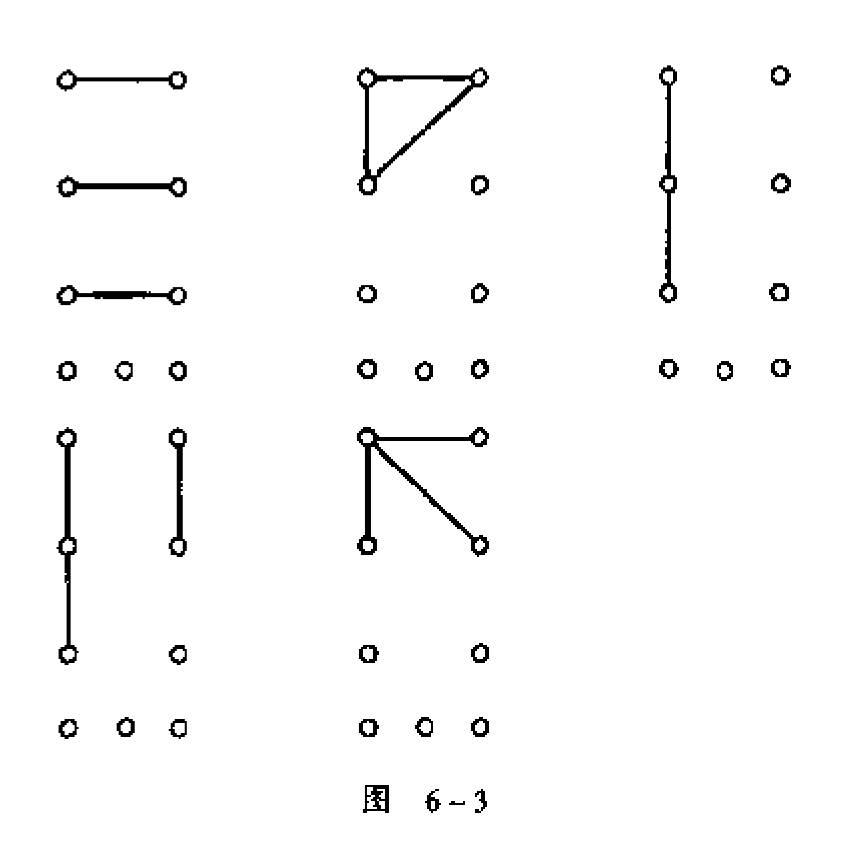


图 6-3

从同构的观点来看,H 有且仅有图 6-3 所示的 5 种情形. 不论哪一种情形,图 H(即含有 9 个顶点 33 边的图)都一定有一个 K_6(事实上,从 K_9 中去掉至多 3 个顶点,就能去掉不染色的 3 条边,于是剩下一个 K_6),而由 $R(K_3, K_3)=6$(见 § 1),H 中必含一个同色三角形. 于是,便证得(6·3)式.

由(6·2)(6·3)式,得 $n=33$.

请注意,这道被认为是国际数学竞赛的"难题"(4 个半小时解 3 道题,这是其中的第 3 题),用的却是本书 § 1, § 2 中

谈到的一点简单的数学思路.

沿着这条思路,读者可以考虑一下:如果把题目的9个点换为10个点,n的值该是多少?如果对于一般的k个点,能探索出n的规律吗?

§7 从三角形到星星,树……

我们记得,在§1中所玩的染色游戏中,两个游戏者使用红,蓝两种不同颜色的铅笔.如果把条件放宽一些,游戏者可以使用红,蓝,黑三种不同颜色的铅笔给 K_n 的边染色,那么要必出现一个同色三角形的最小顶点数 n 又是多少呢?

用拉姆赛数的记号,也就是要求 $R(K_3,K_3,K_3)$的值.

尽管 $R(K_3,K_3)=6$ 可以轻而易举地求得,可是 $R(K_3,K_3,K_3)$却花了数学家很大的力气,直到1955年,才由两位数学家格林伍德(Greenwood)和格里森(Gleason)求得:

$$R(K_3,K_3,K_3)=17.$$

我们要体会一下求出上述结果的难度,只要想象一下,如何找出它的一个临界图,即在一个16个顶点的完全图(它有136条边)上,设计一个染3色的方案,使它不含一个同色三角形.当然,它很难用纯几何的方法拼凑出来.下面,是格林伍德和格里森用代数方法构造出来的一个 $R(K_3,K_3,K_3)$的临界图 K_{16}.为了描图方便,我们用粗实线表示红色,细实线表示蓝色,而黑色的边就是两点间没有画出的线,见图7-1.

如果我们还要大胆往前走一步,考虑可以染四种不同颜色的情况,即 $R(K_3,K_3,K_3,K_3)$.直到今天,全世界的数学家对它仍束手无策.两位年青的数学家,福克曼(Jon Folkman)和钟芳蓉分别找到它的上界和下界:

$$51\leqslant R(K_3,K_3,K_3,K_3)\leqslant 64.$$

我们不要企望继续走下去了.仅对于两种色的情形,要寻

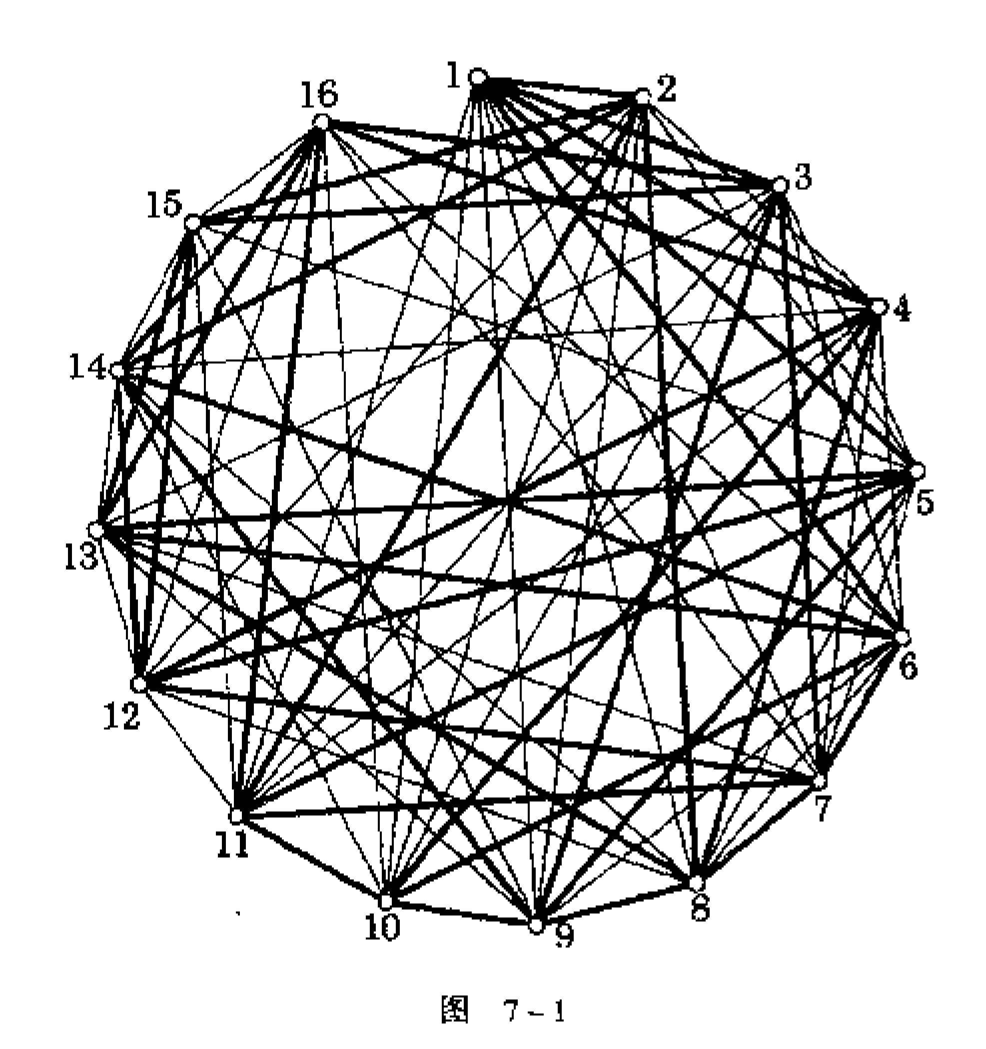


图 7-1

找稍大一些的同色完全子图也是十分困难的，在§3中，厄尔多斯给我们讲述的那个外星人入侵的故事已经令人吓了一跳.一个美国数学家伯尔(S.A.Burr)甚至警告说：他相信 $R(K_5, K_5)$可能永远也求不出来！

但是数学家们不会无事可干，他们凭着善于联想的思维，不断地开拓出前进的道路.

既然，拉姆赛考察 $R(K_p, K_q)$，那么如果有 K_p，K_q 不局限于两个完全图，而换为一般的图 G 和 H，$R(G, H)$就意味着把 K_n 染红，蓝两色，必出现一个红色 G，或蓝色 H 的最小的数 n.

20 世纪 70 年代，数学家哈拉里(F.Harary)和许伐塔尔

(V.Chvatal)首先想到了这一点,他们把 $R(G,H)$(或 $R(G_1, G_2,\cdots,G_R)$)称为广义的拉姆赛数.

既然 G 和 H 可以是我们认定的任意结构的图,那么 $R(G,H)$的研究范围就比 $R(K_p,K_q)$要更广泛得多,有趣的是,$R(G,H)$表面上似乎比 $R(K_p,K_q)$更复杂了.可是,对于很多特定的图 G 和 H,广义拉姆赛数的发现却捷报频传.

"山重水复疑无路,柳暗花明又一村",数学家们又开拓了一个新的研究领域.

让我们进入到广义拉姆赛理论的领域中,走马看花地领略一下它的风光.

我们先用一种称为"星"的图来代替 K_p,K_q. n 个顶点的星图,就是由 1 个点向其余 $n-1$ 个点连线所组成的图.图 7-2 所示的两个图都是同构的 n 阶星图,我们把它记为 $K_{1,n-1}$.

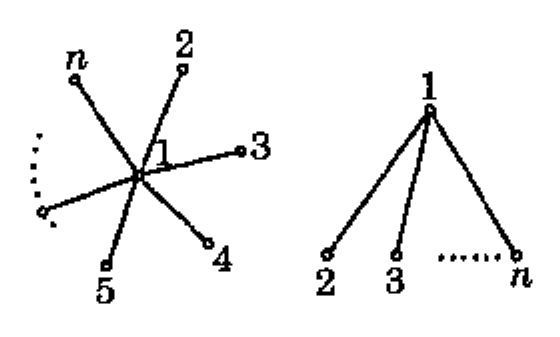


图 7-2

探索一个具体的广义拉姆赛数 $R(K_{1,4},K_{1,4})$,仍然承袭我们上面研究的方法,先证明

$$R(K_{1,4},K_{1,4})\leqslant 7. \qquad (7\cdot 1)$$

这等价于证明,把 7 阶完全图的边染红,蓝两色,至少出现一个同色的 5 阶星.

对 K_7 的任一点,引出 6 条边.若此 6 边中有 4 边是红色(或蓝色),则就出现一个同色的星 $K_{1,4}$.于是,剩下的情形,只需考虑 K_7 中的每一点引出的 6 条边中有 3 条红边,3 条蓝边的情形,如图 7-3 所示.我们算一下,这时 K_7 中一共有多少

条红边.易知,红边条数是

$$\frac{1}{2}\times3\times7,$$

但这不是一个整数,是不可能的.

这说明,K_7 中每点都如图 7－3 的情形是不可能发生的.于是,便证得(7·1)式.

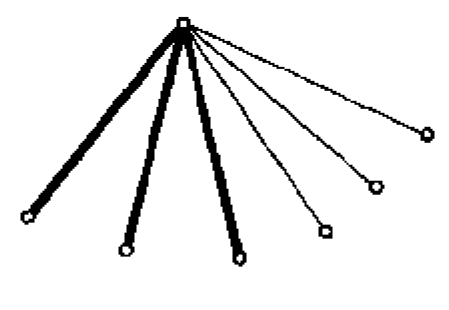


图 7－3

为了证明

$$R(K_{1,4},K_{1,4})\geqslant7,\quad(7\cdot2)$$

我们只需找出 K_6 的一个二染色方案,使它不含同色星 $K_{1,4}$便可.图 7－4 就是这样的一个图.

由(7·1),(7·2),我们便证得 $R(K_{1,4},K_{1,4})=7$.

可以看到,证明含同色 5 阶星图的广义拉姆赛数特别简单,可是,寻找含同色 5 阶完全图的拉姆赛数 $R(K_5,K_5)$,仍是至今无法解决的难题.

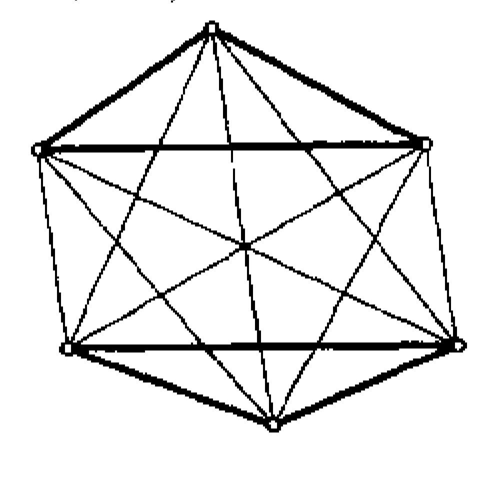


图 7－4

现在,我们考察另一类特殊的图——树.一个图,如果我们能从任一点沿着边到达其他每一点,这个图称为连通,而若从某一点沿着边(不重复地)回到原来的点,这个图便含有圈.一个连通且无圈的图称为树.图 7－5 给出了 6 个顶点的不同的树.

星图是树图的特例.从图 7－5 中可见,$K_{1,5}$是一个特殊的树.一般地,我们把 p 阶的树记作 T_p.在树中,仅引出一条边的点叫悬挂点,这条边叫悬挂边.例如,$K_{1,5}$有 5 个悬挂点,5 条悬挂边.

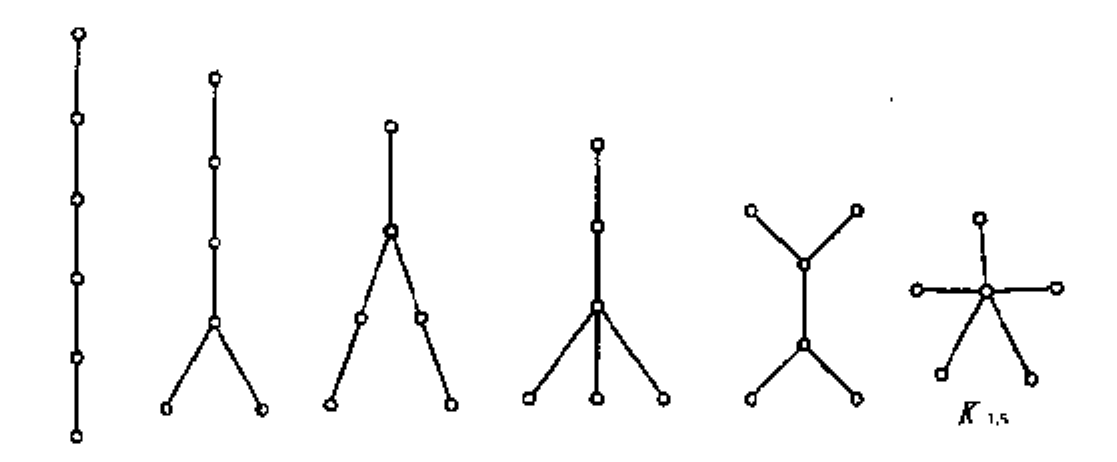


图 7-5 6个顶点的树

下面,我们证明一个子图是 T_p 和 K_q 的广义拉姆赛数.这是许伐塔尔 1977 年得到的一个结果.

设 $p>1,q>1$,则

$$R(T_p,K_q)=(p-1)(q-1)+1. \quad (7\cdot3)$$

证明:先证 $R(T_p,K_q)\leqslant(p-1)(q-1)+1. \quad (7\cdot4)$

对 $p+q$ 用数学归纳法证明上述不等式成立.

当 $p=2$ 时,易知 K_q 的边染红,蓝两色,必有一个红色 T_2 或蓝色 K_q 存在.于是 $R(T_2,K_q)\leqslant q$.同理,对 $q=2$,亦有 $R(T_p,K_2)\leqslant p$.于是,对 $p=2$ 或 $q=2$,(7·4)式成立.

我们先明确一下,这里的归纳假设是什么?

假设结论(7·4)对 $p+q-1$ 成立,即对一个阶数不小于 $(p-2)(q-1)+1$(或 $(p-1)(q-2)+1$)的完全图的边染红,蓝两色,必存在一个红色的 T_{p-1} 或蓝色的 K_q(红色的 T_p 或蓝色的 K_{q-1}).

现证明(7·4)式对 $p+q$ 也成立,即对一个完全图 $K_{(p-1)(q-1)+1}$ 的边染红,蓝两色,必含有一个红色 T_p 或蓝色 K_q.

设 $p>2,q>2$, T_p 的任一个悬挂点为 v(这是必定存在

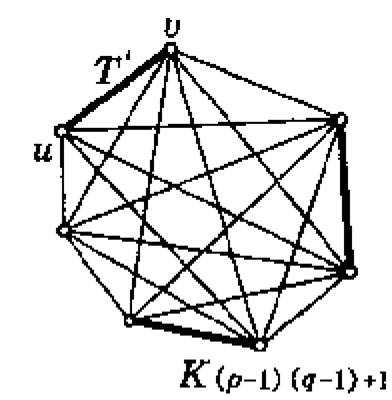
的),连接v的悬挂边为$e=\{v,u\}$(即 u 是悬挂边的另一个端点).在 T_p 中把悬挂点v 和悬挂边e 去掉,剩下的一棵$p-1$阶的树记为 T'.

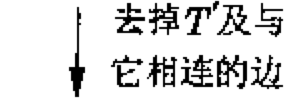
现在考察把完全图 $K_{(p-1)(q-1)+1}$的边染成红,蓝两色.

因$(p-1)(q-1)+1>(p-2)(q-1)+1$.由归纳假设,$K_{(p-1)(q-1)+1}$必满足:

或含有一个红色的 T'($p-1$ 个顶点), (7·5)

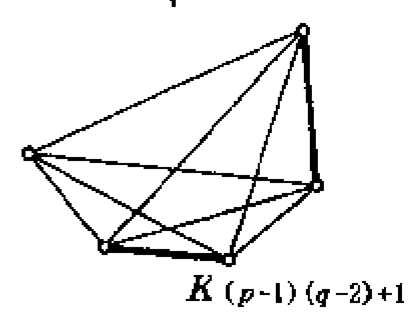
或含有一个蓝色的 K_q. (7·6)





若发生(7·6)的情形,则结论(7·4)成立.

若发生(7·5)的情形,我们在$K_{(p-1)(q-1)+1}$中把树 T' 及与 T' 相连的边都去掉,留下一个有$(p-1)(q-2)+1$ 个顶点,边染两色的完全图 $K_{(p-1)(q-2)+1}$,如图 7-6 所示.



根据归纳假设,留下的两色完全图 $K_{(p-1)(q-2)+1}$ 必

或含一个红色的 T_p, (7·7)

或含一个蓝色的 K_{q-1}. (7·8)

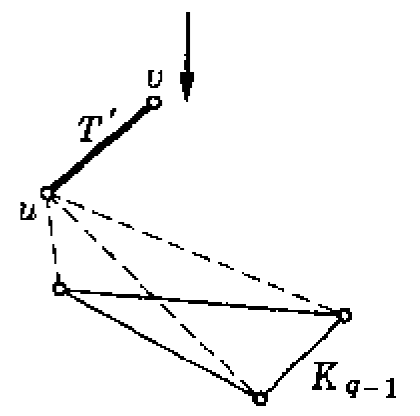


图 7-6

若发生(7·7)的情形,则结论(7·4)成立.

若发生(7·8)的情形.显然,此蓝色的 K_{q-1}与去掉的 T' 无公

共点.

最精彩的一步来了！我们考察 u 点与 K_{q-1} 的 $q-1$ 个顶点的连线(共有 $q-1$ 条)(见图 7－6 最后一个图的虚线).若这 $q-1$ 条边有一条是红边,则与 T' 一起便组成一个红色的 T_p.若这 $q-1$ 条边全是蓝边,则与 K_{q-1} 一起便组成一个蓝 K_q.于是,我们便完成了对(7·4)式的证明.

剩下的工作是证明

$$R(T_p,K_q)\geqslant(p-1)(q-1)+1. \qquad (7\cdot 9)$$

我们只需构造一个边染红,蓝两色的 $(p-1)(q-1)$ 阶完全图,使它既无红色的 T_p,也无蓝色的 K_q.

我们作 $q-1$ 个互相无公共点的红色完全图 K_{p-1},再把任两个红色完全图之间的点用蓝边连结,就得到一个 $(p-1)\cdot(q-1)$ 阶的图 G,如图 7－7 所示,为了使画面清晰,我们把每两个 K_{p-1} 之间的蓝线省去.

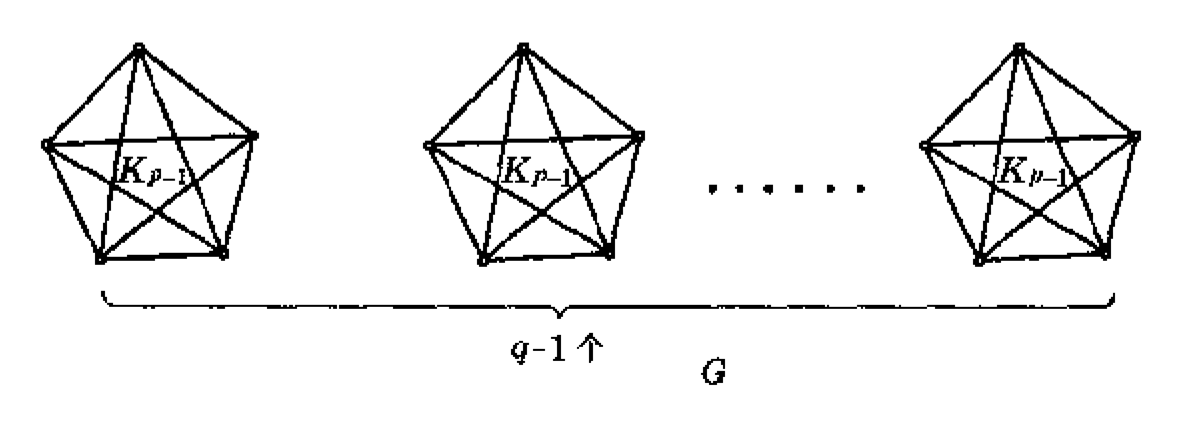


图 7－7

不难检验,图 G 不含红色的 T_p,也不含蓝色的 K_q,即(7·9)式得证.

由(7·4),(7·9),我们便证得(7·3).

根据(7·3)式,可得

$$R(T_3, T_4) = (3-1)(4-1)+1 = 7,$$

$$R(K_{1,3}, K_3) = (4-1)(3-1)+1 = 7.$$

读者可以用红,蓝两色染一个完全图 K_7 的边,必出现一个红色 3 阶树 T_3 或蓝色 4 阶完全图 K_4,也必出现一个红色 4 阶星 $K_{1,3}$或蓝色三角形 K_3.

1979 年,美国贝尔电话公司的数学家伯尔(Burr)绘制了一张很有价值的图表,在图表中列出了 113 种不同的广义拉姆赛数.例如

$$R\left(\quad,\quad\right) = 10,$$

$$R\left(\quad,\quad\right) = 9.$$

当然,广义拉姆赛数还有很多未解决的问题.例如,我们虽然知道

$$R\left(\quad,\quad\right) = 15,$$

但是,我们不能确定

$$R\left(\quad,\quad\right), \qquad (7\cdot10)$$

而仅仅知道它在 17 和 20 之间.有数学家猜想,它的精确值是 20.有志于研究拉姆赛理论的读者,你可以在完全图 K_{17}, K_{18} 或 K_{19}上设计一种红,蓝染色,若它们不包含同色的 ,那么,你可以宣布:对(7·10)的广义拉姆赛数的研究有了进展,甚至证明了上述猜想.

§8　悬赏 $1000/v^{1/8}$美元

如果我们把拉姆赛数看成是一种对应，那么染两色的拉姆赛数可以看作是

$$K_n \longrightarrow (K_p, K_q). \tag{8·1}$$

左边是 n 阶完全图，右边是红，蓝染色中，出现的红色子图 K_p 或蓝色子图 K_q，它们也是完全图．我们要寻求最小的 n 值．

20 世纪中，哈拉里和许伐塔尔把(8·1)式的右边改为两个一般的子图，即容许是非完全图的其他图类，如星，树，圈，等等，我们可以写成

$$K_n \longrightarrow (G, H). \tag{8·2}$$

几乎在同一个时候，厄尔多斯和匈牙利的另一位数学家哈伊那尔(A.Hajnal)从(8·1)式想到另一个问题：能否把左边的 K_n 的限制去掉，即考虑不一定是完全图的 G 的染色，

$$G \longrightarrow (K_p, K_q). \tag{8·3}$$

1967 年，他们提出这样一个最原始的问题：是否存在一个图 G，它不包含 K_6，在染两色时必出现一个同色三角形，这样的图的最小顶点数应是多少？ 即考虑

$$G \longrightarrow (K_3, K_3). \tag{8·4}$$

读者容易知道，若 G 含有 K_6，这个问题便没有研究的必要了．

问题提出来后的第二年，美国贝尔实验室的数学家格雷厄姆(R.L.Graham)找到了这个问题的一个巧妙解答．它便是如图 8－1 的一个有 8 个顶点的图．

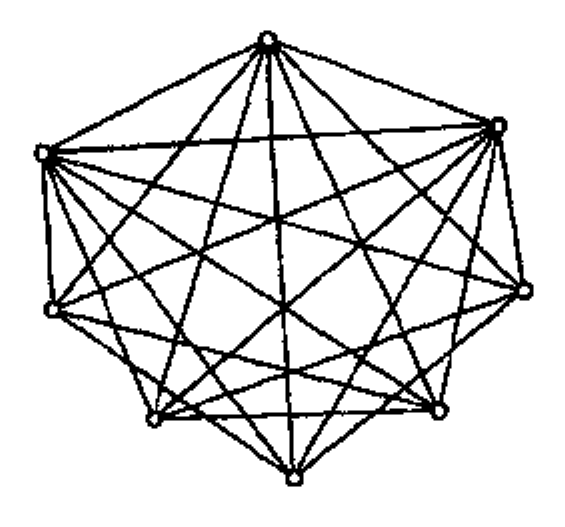


图 8-1

这个图不是完全图，它是8阶完全图 K_8 抹掉一个5个顶点的圈所组成. 读者不难验证：把这个图的边随意染红，蓝两色，它必然出现一个同色的三角形. 如果只有7个顶点，是作不出一个具有这样性质的图的. 当然，把图8-1的图任意抹掉一条边，你也可以发现一种染色方法——用红，蓝两色染它的边，不会出现一个同色三角形. 有兴趣的读者，不妨试试看.

上面，我们看到，格雷厄姆已经找到了一个极小的，不含 K_6 的图，回答了厄尔多斯提出的问题. 然而，数学家的天性就是层层设问，人们自然想到，对于(8·4)式，如果限定 G 不含 K_5，K_4(当然，不能不含 K_3)又如何呢?

我们暂且把满足(8·4)式的图 G 称为拉姆赛图.

1973年，一个不含 K_5 的18阶的拉姆赛图被数学家欧文(Robert W. Irving)找到了.

对于不含 K_4 的拉姆赛图，它的难度更大. 虽然，早在1970年，在福克曼(J. Folkman)的论文中已经证明了这种图的存在. 可是，遗憾的是，福克曼提供的那个图 G 令人可望而不可及，它的顶点数大得惊人，以致我们不得不用一种新的记数

法来表示它. 福克曼用异乎寻常的精力和技巧"构造"了这样的一个图. 令人扼腕长叹的是,当他的论文发表的前一年,这位极有才华的年青数学家夭亡了,年仅31岁.

为了表达福克曼的图(我们不妨简称为福克曼图)的顶点数有多大,我们引进一种称为箭头标号"↑"的记数法. 这是著名计算机专家克努特(Donald E. Knuth)首先提倡使用的.

设 a,b 都是自然数,定义"↑"的意义如下:

$$a\uparrow b=a^{b}, \tag{8·5}$$

$$a\uparrow\uparrow 1=a,a\uparrow\uparrow b=a\uparrow(a\uparrow\uparrow(b-1)). \tag{8·6}$$

由(8.6)式,我们得

$$\begin{aligned}a\uparrow\uparrow b&=a\uparrow(a\uparrow\uparrow(b-1))\\&=a\uparrow(a\uparrow(a\uparrow\uparrow(b-2)))\cdots\\&=a\uparrow(a\uparrow(a\uparrow\cdots(a\uparrow\uparrow 1))\cdots)\\&=a\uparrow(a\uparrow(a\uparrow\cdots a)\cdots)\\&=a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}\quad(\text{共 } b \text{ 个 } a).\end{aligned} \tag{8·7}$$

(8·7)式表明,$a\uparrow\uparrow b$ 的意义是由一共 b 个 a 组成的一种 b 层的"塔幂". 对比(8·5)与(8·7),我们已经初步领略到,"↑↑"比"↑"的递增速度快得多. 我们再看"↑↑↑",定义

$$a\uparrow\uparrow\uparrow 1=a,a\uparrow\uparrow\uparrow b=a\uparrow\uparrow(a\uparrow\uparrow\uparrow(b-1)). \tag{8·8}$$

用"↑↑↑"描述的数是一个非常大的数. 为了使读者了解这个"大"的概念,我们用例子去加深认识.

例如,$3\uparrow 3=3^{3}=27$,

$$3\uparrow\uparrow 3=3^{3^{3}}=7,625,597,484,987,$$

$$3\uparrow\uparrow\uparrow 3=3\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow\uparrow 2)$$

$$=3\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow\uparrow1))$$
$$=3\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow3)$$
$$=3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\quad(\text{一共有 7625597484987 个 3});$$

又如，$2\uparrow4=2^4=16$，

$$2\uparrow\uparrow4=2^{2^{2^{2}}}=65536,$$
$$2\uparrow\uparrow\uparrow4=2\uparrow\uparrow(2\uparrow\uparrow\uparrow3)$$
$$=2\uparrow\uparrow(2\uparrow\uparrow(2\uparrow\uparrow\uparrow2))$$
$$=2\uparrow\uparrow(2\uparrow\uparrow(2\uparrow\uparrow2))$$
$$=2\uparrow\uparrow(2\uparrow\uparrow4)$$
$$=2\uparrow\uparrow65536$$
$$=2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}\quad(\text{一共有 65536 个 2}).$$

$2\uparrow\uparrow\uparrow4$ 是一个大得难以想象的数，格雷厄姆曾经这样形容数 $2\uparrow\uparrow\uparrow4$：“即使一个数大到必须用世界上所有书的全部篇幅再加上所有计算机的全部存储能力才能把它容纳进去，这个数同 $2\uparrow\uparrow\uparrow4$ 相比仍然小得微不足道.”

当然，从理论上，我们还可以考察“$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$”. 例如 $3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow3$，这个数又是如此巨大，以致 $3\uparrow\uparrow\uparrow3$ 与它相比简直是“小巫见大巫”. 如果用塔幂的形式表示 $3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow3$，它的高度与 $3\uparrow\uparrow\uparrow3$ 的高度相比简直是天壤之别了.

现在，我们回过头来，看看福克曼图. 福克曼找到了一个不含 K_4 的拉姆赛图，它的顶点个数是 $2\uparrow\uparrow\uparrow2^{901}$. 当然，福克曼不是靠画出来的，而是通过数学证明肯定了这个图的存在性.

读者们看过上面关于“$\uparrow$”的叙述后，就可以想象福克曼

图的点数有多大. 可以设想,在宇宙中紧凑地挤满了和电子一样大小的球,但这种球的总数也还是远远小于福克曼图中的顶点数.

真是可望而不可及!

于是全世界的数学家都希望能把福克曼图的阶数缩小,即找到一个顶点数更小的不含 K_4 的拉姆赛图 F.

著名的数学家厄尔多斯声言:永久性地悬赏 100 美元,给能找到一个顶点数小于 100 万的图 F 的人. 后来,厄尔多斯又增加它的奖金:谁能找到一个顶点数为 v 的图 F,他将得到奖金 $\frac{1000}{v^{1/8}}$ 美元. 显然,顶点数越小,得到的奖金将越多. 当然,如果你能找到一个一亿个顶点(10^8)的图 F,你也可以获得 100 美元的奖金.

关于这类问题,我们很难在"构造性"上有多少作为,然而,我们却能在"存在性"上做很多的工作. 当我们读完这一节时,回想起(8·1),(8·2),(8·3)式,谁都会自然发问,还有一种

$$G \longrightarrow (G_1, G_2)$$

的推广呢?

1976 年,捷克数学家耐斯特利(J. Nešetřil)和洛德尔(V. Rödl)完满地回答了这个问题,而且还得到了一个更一般性的结果. 他们证明了:对任意给定的 k 个图 $G_1, G_2, \cdots, G_k$,图 G_i 不含的完全图的最小阶数为 $n_i (i = 1, 2, \cdots, k)$,则一定存在一个图 G, G 不含完全图 K_n, $n = \max\limits_{1 \leq i \leq k} n_i$, 且

$$G \longrightarrow (G_1, G_2, \cdots, G_k).$$

我们的故事到此圆满地告一段落. 对某一个课题,数学家们锲而不舍地一步一步把问题引向深入. 而同一个问题,在地

球不同角落的数学家,往往以不同的方式去关注着它.在20世纪30年代,当拉姆赛的定理公诸于世的时候,在远离英国的匈牙利,又有一群年青的大学生用另一种形式发现了这一定理.这就是下一节我们将要叙述的,一篇"带来幸福结局的论文".

§9 带来幸福结局的论文

1930年,当一颗数学新星拉姆赛去世之时,他的20页的论文在英国发表了.可是,这并没有引起人们太多的注意.

二年以后,在匈牙利布达佩斯大学的校园里,几位崛起的数学天才让拉姆赛定理这颗数学瑰宝发出了耀眼的光彩.

1933年冬天,天上飘着雪花,在布达佩斯大学校园区的一间屋子里,炉火正旺,一群青年人正在参加一个数学聚会.这种聚会,他们几乎每个星期天都要举行.主要是讨论数学问题.

在这些聚会里,孕育出不少当代的著名数学家.

在这些年青人中,有数学系19岁的学生厄尔多斯(就是§4中提到的那位大名鼎鼎的人物),也有刚获得布达佩斯工业大学化学工程学位的赛克尔斯.他们正在倾听一位女同学爱瑟·克莱因(E.Klein)的发言.

克莱因向大家提出一个有趣的问题,要求与会者证明下列一个简单的几何命题:

如果平面上5个点中的任何3点均不在一条直线上,那么其中总有4个点构成一个凸四边形.

把多边形的任何一条边向两方延长,如果多边形的其他各边都在延长所得直线的同旁,那么这样的多边形叫做凸多边形.例如,正多边形都是凸多边形,而像五角星的10边形就不是凸的.

对于克莱因的问题,大家一下子不得其解.稍后,克莱因

给出了她的一个得意的证明.

克莱因在黑板上画出5个点 A,B,C,D,E,它们的分布有三种情形,如图9-1所示:

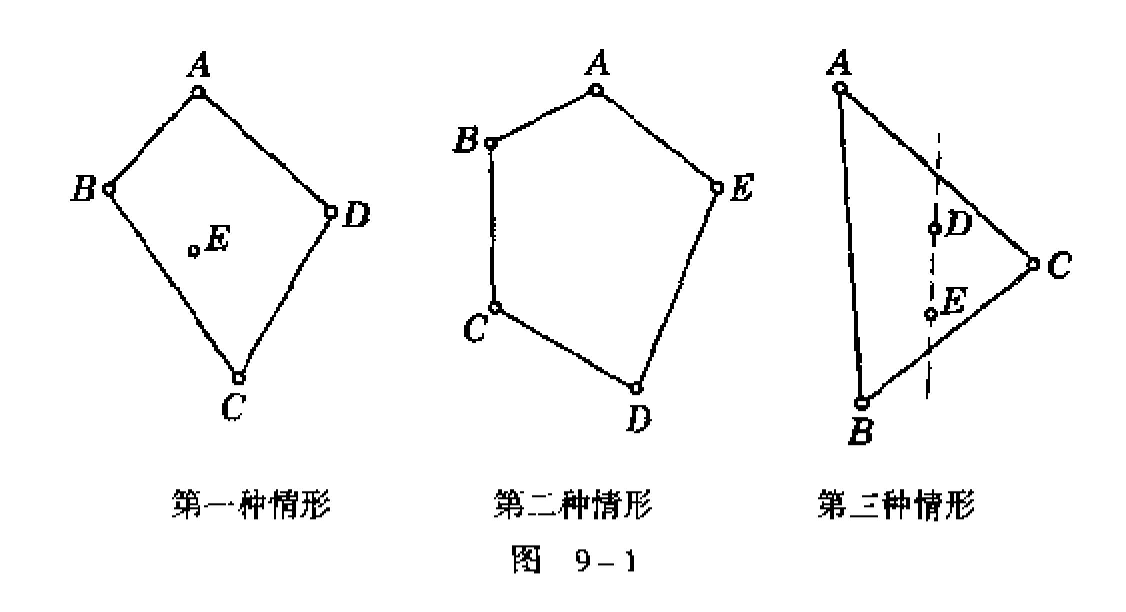


图 9-1

能围住5个点的凸轮廓称为闭包.

第一种情形,闭包是一个凸四边形.命题成立.

第二种情形,闭包是一个凸五边形,则 $ABCD$ 就是一个凸四边形,命题也成立.

第三种情形,闭包是一个凸三角形 ABC.把三角形内的两点 D,E 连结(见虚线)成直线,A,B,C 三点必有两点在直线 DE 的一侧(因无三点共线),如图9-1,$ADEB$ 便是一个凸四边形.

克莱因的证明刚结束,厄尔多斯接着说:"于是,我们知道,平面上任意9个点中,总能找到5个点构成一个凸五边形.当然,这9个点不容许有3点共线."

厄尔多斯的话引起了一阵热烈的讨论……

他们提出了一个新的问题:

如果平面上有 $1+2^{k-2}$ 个点(无三点共线),$k=3,4,5,\cdots$,是否总能找到 k 个点,使其构成一个凸 k 边形呢?

当 $k=3$ 时,问题的正确性显而易见.当 $k=4,5$ 时,就是克莱因,厄尔多斯解决了的问题,那么,对任意的 $k\geqslant 3$,这样的凸 k 边形必定存在吗?

没有人能回答这个问题.尽管每个人心中都猜想它是正确的,但谁也拿不出一个令人信服的证明来.

赛克尔斯在回忆这次聚会时,兴奋地写道:"我们很快就意识到,这个问题不能用简单的论证来解决,大家都感到十分振奋,因为我们发现了一类新的几何问题."

不久,赛克尔斯证明了下面一个出色的定理:

设数 $k\geqslant 3$,则必存在一个数 N,只要平面上 N 个点中任意3点不共线,则总可以找出其中有 k 个点构成一个凸 k 边形. (9·1)

这又是一个存在性定理,它肯定了当有足够多的点时,必可找出一个凸 k 边形.如果我们把所需要的最小点数记作 $N(k)$,那么克莱因的问题,事实上是求出了 $N(4)=5$,而厄尔多斯的补充是指出了 $N(5)=9$.这群匈牙利年青数学家猜想的是 $N(k)=1+2^{k-2}(k\geqslant 3)$.

我们来欣赏一下赛克尔斯对(9·1)所陈述的定理的证明.

赛克尔斯先证明了下面的一个关于集合的定理:

S 是一个 N 元集,T 是 S 的所有 r 元子集所成的集合$(1\leqslant r\leqslant N)$,对给出的正整数 $p\geqslant r,q\geqslant r$,则必存在最小的正整数 n,使得对于 $N\geqslant n$ 时,T 的任一划分 $T=\alpha\cup\beta,\alpha\cap\beta=\varnothing$(即把 T 分成不相交的两部分 α,β),S 必有一 p 元子集 A,它的所有 r 元子集都属于 α(简称(p,α)子集)或者有一个 q

元子集 B，它的所有 r 元子集都属于β(简称(q,β)子集).

(9·2)

不久，赛克尔斯发现，他所证明的定理(9·2)正是拉姆赛在 3 年前发表的论文所证明的结论. 虽然，在这以前，他们并没有听说过拉姆赛的名字.

为了让读者了解定理(9·2)与拉姆赛定理接近的程度，我们可以用染色的观点去观察(9·2).

把 S 看作是有 N 个顶点的集合，若 T 是 S 的所有 2 元子集所成的集合($r=2$)，则 T 即为 N 个顶点的完全图的所有边所成的集合. 对给出的正整数 $p\geqslant 2, q\geqslant 2$，则必存在正整数 n，使得 $N\geqslant n$ 时，边集 T 的任意两染色：染色 α 和染色β(即把 T 分成不相交的两部分α,β)，必有 K_p 属色α(即 S 中有一 p 元子集，它的所有 2 元子集都属于 α)或者有 K_q 属于色β.

几星期后，赛克尔斯高兴地对厄尔多斯说："聪明的保尔，您听着，实际上我发现的正是拉姆赛定理……"

为了证明定理(9·1)，赛克尔斯又证明了下面另一个几何命题：

设平面上有 $n(\geqslant 4)$个点，无 3 点共线，每 4 点构成的四边形都是凸的，则此 n 点是一个凸 n 边形的顶点. (9·3)

用反证法很容易证明(9·3). 假设此 n 点不论如何连结都不是一个凸 n 边形，由 $n\geqslant 4$，可知必能找到一边 CD，它的延长线交另一边 AB 于 E，$E\neq A,B$(否则有 3 点共线)，于是四边形 $ABCD$ 不是凸四边形，与条件矛盾!

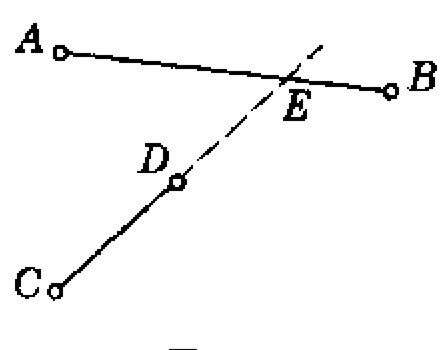


图 9-2

于是，赛克尔斯可以证明

定理(9·1)了.

$k=3$ 时,定理显然成立($N(3)=3$).

设 $k\geqslant 4$,对平面上任意给出的且无三点共线的 N 个点,每次取其中 4 点构成四边形,把所有可能得出的全部四边形的集合划分为两个集合 α 和 β. α 由全部凸四边形组成,β 由全部非凸四边形组成.

运用定理(9·2)$r=4$, $p=k$, $q=5$,则必存在一个 n,若 $N\geqslant n$ 时,必有一个(k, α)子集或有一个(5, β)子集.

若有一个(k, α)子集,即有 k 个点,它的每 4 个点所成的四边形都是凸的. 由(9·3)的结论,此 k 点成一个凸 k 边形. 若有一个(5, β)子集,即有 5 个点,每 4 个点所成的四边形是非凸的,这不可能,因为与克莱因的定理矛盾.

于是,便证明了定理(9·1).

几乎在同一个时候,厄尔多斯用另一种方法也证明了定理(9·1)的结论.

1935 年,厄尔多斯和赛克尔斯联名发表了他们的研究成果,论文的题目是:"几何中的一个组合问题". 厄尔多斯常常把这一著名论文称为"带来幸福结局的论文",论文发表不久,赛克尔斯和女数学家克莱因喜结良缘,而厄尔多斯则由此开始成长为世界著名的数学家.

事实上,赛克尔斯和厄尔多斯从集合论的观点,独立地重新发现了拉姆赛定理!和拉姆赛数一样,要想确定数 $N(k)$ 也十分困难. 目前仅能知道的是 $N(3)=3$, $N(4)=5$, $N(5)=9$,连 $N(6)=17$ 这个猜想是否成立,至今仍是个谜,更不要说厄尔多斯关于 $N(k)=1+2^{k-2}$ 这个猜想了. 也就是说,人们无从知道,下列这一结论是不是正确:只要平面上至少有 $1+2^{k-2}$ 个点,无3点共线,就必可找到 k 个点构成一个凸 k 边形.

§ 10 他比拉姆赛做得更早

当我们提到拉姆赛理论时，我们总是首先想到了点集和边集的染色，然而，这类问题往往可以以数集的形式出现．荷兰数学家范德瓦尔登（B.L.Van der Waerden）早在拉姆赛证明他的定理以前，就已经开始考虑数列的染色问题了．

1926年，德国汉堡大学的范德瓦尔登获悉了一个涉及等差数列的古怪问题．所谓等差数列，就是相邻两项之差为常数的一系列数．例如，序列3，5，7就构成一个三项的等差数列，其相继两项之差（后一项减前一项）称为公差．上述等差数列的公差为2．

范德瓦尔登获悉的问题是1920年德国数学家舒尔（I.Schur）提出的一个猜想：

如果把正整数集任意分拆成两部分，那么对于任意给定的一个正整数 l，两部分中必有一部分含有 l 项等差数列．

(10·1)

我们把上面的"分拆成两部分"的提法改换为更直观的"染色"观点，则舒尔猜想可以叙述为

如果把正整数集的每个数涂上红色或蓝色，则对于任意给定的一个正整数 l，必有一个含有 l 项的同色的等差数列．

(10·2)

读完这个猜想，你可以想象：在一个浩浩荡荡伸展到无穷远处的自然数列（正整数集）中，数被染上了红或蓝的两种颜色，你总可以在这条"两色龙"中，挑出 l 个数来，它们既为同

一种颜色，又是一个等差数列．由于自然数具有这种无穷性，因此舒尔猜想的正确性令人容易接受．

但是，它的证明并不是轻而易举的．

就是在 1926 年的那一天的中午，范德瓦尔登和他的好友阿尔丁(E. Artin)、施莱尔(O. Schreier)在吃饭时一起谈论着舒尔猜想．

午饭后，他们一起走进阿尔丁在汉堡大学数学系的办公室，试图证明这个问题．范德瓦尔登在回忆当时的情景时，写道："我们在黑板上画了一些图，有时我们会突然灵机一动，想到了一些关键的线索．这类线索有好几次曾使我们的讨论出现新的转机，其中一个想法最终引导我们得出了答案．"

在讨论中，阿尔丁提出的一条重要思路是，把舒尔猜想的那个无穷序列改为有穷序列来考虑．于是，舒尔猜想可等价于下列的命题：

对任意给定的正整数 l，存在一个自然数 $W(l)$，使得把数列 $1,2,\cdots,W(l)$（下面简记为 $[1,W(l)]$）染两色后，必有一个同色的 l 项等差数列． (10·3)

例如，若 $l=2$，我们可以证明 $W(l)=3$，即把数列 1，2，3 任意染红，蓝两色，必可找到一个含两项的同色等差数列．当然，对任何不小于 3 的数 a，$[1,a]$ 也有此性质，只不过 3 是最小的一个数而已，我们称这个最小的数为范德瓦尔登数．

又，若 $l=3$，可以证明 $W(l)=9$，即可证明把数列 1，2，…，9 任意染两色，必会出现一个同色的 3 项等差数列．

一个最直接的证明方法是用穷举法．$\{1,2,\cdots,9\}$ 染两色的各种可能方案共有 512 种（想想看，怎么算出来的?），把每种方案都检查一遍，你会确认：总可以选出同色的 3 个数，它们成等差数列．

"穷举"并不是一个好办法.我们改用逻辑推理来证明它，只需考虑 4 和 6 这两个数字颜色相同和颜色不同的两种情形.不妨设数列染红，蓝两色.

1 2 3 ④ [5] ⑥ 7 8 9

图 10-1

情形一：若 4 和 6 同色，不妨设为蓝色(用○表示蓝色).如果 5 也是蓝色，则 4,5,6 便是同色等差数列.如果 5 是红色(图 10-1)(用□表示红色)，则可考察 2 和 8 两个数，只要两数中有一个蓝色，它就和 4,6 构成一个蓝色等差数列(2,4,6 或 4,6,8).若 2 和 8 非蓝色，即均是红色，它们便和 5 组成红色等差数列 2,5,8.

情形二：若 4 和 6 不同色.不妨设 4 是红色，6 是蓝色.因不管 5 是什么颜色，4,5,6 都不成同色等差数列.不妨设 5 是红色(图 10-2).

1 2 3 [4] [5] ⑥ 7 8 9

图 10-2

为了更清楚地看出逻辑推理，我们用图 10-3 表示考虑问题的思路.

至此，我们完成了 $W(3)=9$ 的证明.

在我们停下笔来，嘘一口气的时候，回过头来，审视一下刚刚结束的证明.它一环扣着一环，逻辑推理非常严谨而细密，这是它的优点，但同时又是它的"缺点".因为用每一个数字染色的两种情况来讨论，对于比四大得多的数字，我们那缓慢的逻辑推理将无法应付.也就是说，上面的那种证明方法无法推广到一般情形.

范德瓦尔登注意到命题(10·3)仅要求证明 $W(l)$ 的存在性，因此，$W(l)$ 的大小对于命题是并不重要的.于是，他用一

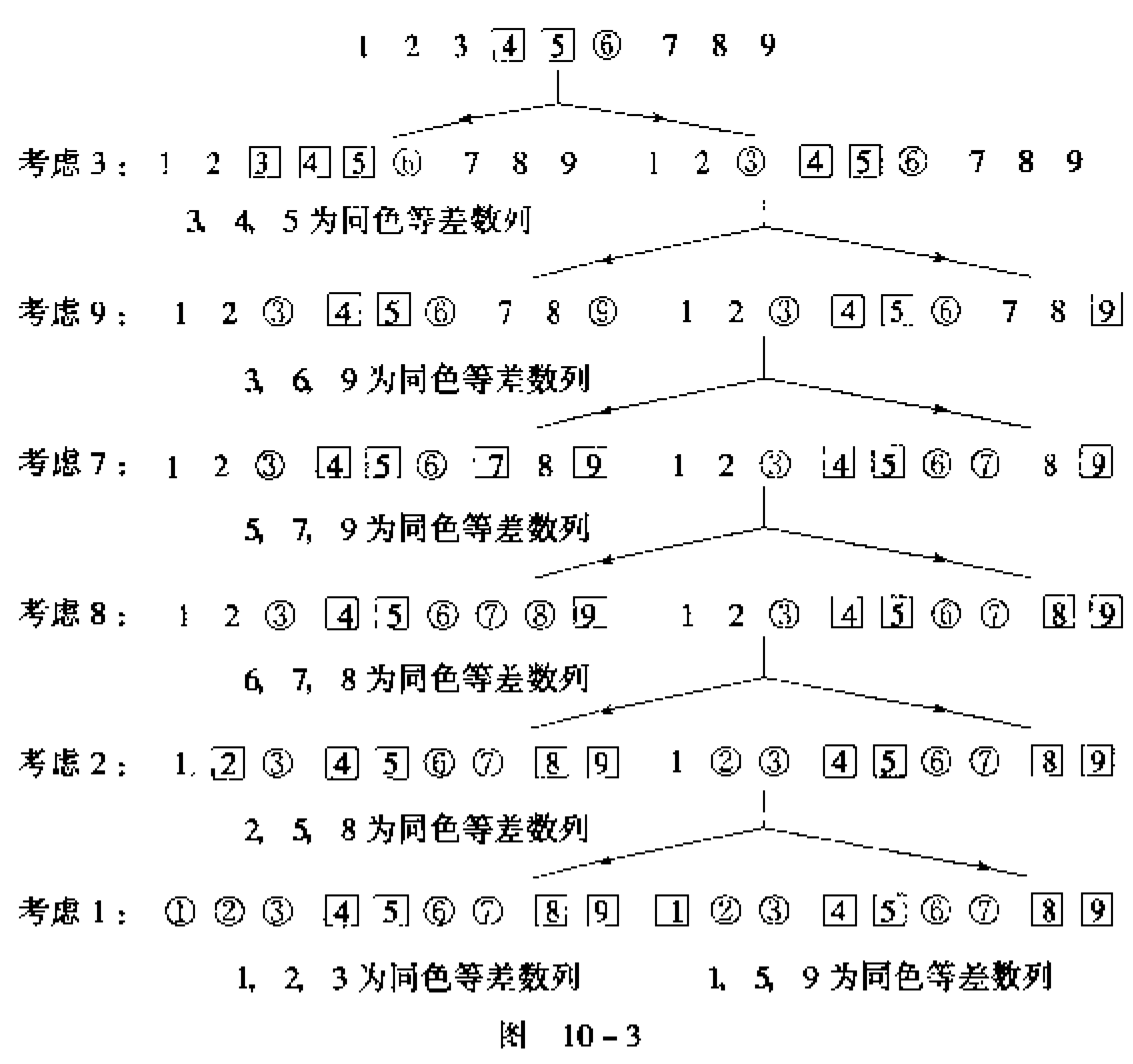


图 10-3

种新的方法去证明 $W(3)=325$，这个方法看起来复杂，但它却有可能推广到更一般性的证明中去.

让我们一起来欣赏一下范德瓦尔登的证明. 把数列[1,325]以5个数为一组，依顺序“切”成65块，依次记为

$B_1=[1,5]$，$B_2=[6,10]$，…，$B_{65}=[321,325]$，把数列[1,325]染红，蓝两色后，在每一块中也是一种二染色. 因为每一块有5个数字，以5个固定的位置染两种颜色，一共有 $2^5=32$ 种不同的染色方案. 我们取出 $B_1,B_2,\cdots,B_{33}$ 个块，必有2块是有相同染色方案的. 不妨设 $B_{11}=\{51,52,53,54,55\}$ 和 $B_{26}=\{126,127,128,129,130\}$ 是按相同染色方案染色的.

考察 B_{11}的前3个数字，至少有两个同色. 不妨设51,53同为红色(用□表示红色，○表示蓝色)，若55也是红色，则51,53,55是红色的等差数列，故只须考虑55是蓝色的情形.

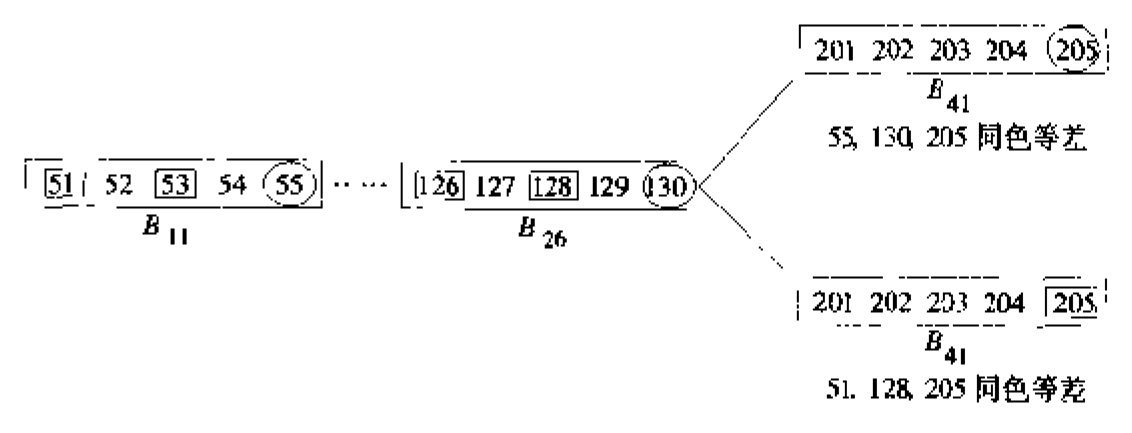


图 10-4

因 B_{26}与 B_{11}是按相同染色方案染色的，故在 B_{26}中126,128是红色，130是蓝色(图10-4).

现在，我们只需考察第 B_{41}块的最后一个数205，若205是蓝色，则55,130,205是同色等差数列；若205是红色，则51,128,205也是同色等差数列.

范德瓦尔登证明了 $W(3)=325$ 以后，他感到，这个方法可以证明更一般的结论. 他向阿尔丁和施莱尔试证了染3色出现3项同色等差数列的情形，即证明：必存在一个自然数 $W(3,3)$，使得把数列 $[1,W(3,3)]$ 染3色后，必有一个同色的3项等差数列. 范德瓦尔登在证明时采用类似2染色的解题思路，但自然数 $W(3,3)$ 却取一个相当大的数，$W(3,3)=7(2\times3^7+1)\cdot[2\times3^{7(2\times3^7+1)}+1]$.

然而，用这个方法直接证明命题(10·3)还是相当困难的. 范德瓦尔登接受了阿尔丁的建议，把命题(10·3)——即舒尔猜想的"2染色"改为"k染色"，采用所谓双重归纳法，证明了下列更一般的定理，数学家们把它称为范德瓦尔登定理：

对任意给定的自然数 l,k,存在一个自然数 $W(l,k)$,使得把数列 $[1,W(l,k)]$ 染 k 色后,必有一个同色 l 项等差数列. (10·4)

自然,当范德瓦尔登定理的特例 $k=2$ 时,就是舒尔提出的猜想——现在可以称为舒尔定理了.我们通常记 $W(l,2)=W(l)$.

跟拉姆赛定理一样,范德瓦尔登定理仅仅刻画了数 $W(l,k)$的存在性.下面,我们把范德瓦尔登数仍记作 $W(l,k)$.寻找 $W(l,k)$的困难比起寻找拉姆赛数有过之而无不及.目前仅知道的范德瓦尔登数仅有 5 个:$W(3,2)=9$, $W(3,3)=27$, $W(3,4)=76$, $W(4,2)=35$, $W(5,2)=176$.

于是,人们的目光转向去估计 $W(l,k)$的界.然而,这个界的估计也是大得惊人.例如

$$W(8,2)>7\times 2^7,$$

而

$$W(10,2)>10^{10^9}.$$

为了记录那些大得异乎寻常的数,在§8 中,我们曾叙述过计算机专家克努特提倡使用的"↑"记数法,函数 $2\underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\uparrow}_{k}n$ 用递归方法定义,即

$$2\uparrow n=2^n, 2\uparrow\uparrow\cdots\uparrow 1=2,$$
$$2\underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}_{k}n=2\underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}_{k-1}(2\underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}_{k}(n-1)).$$

为了实现舒尔定理的定量化刻画,范德瓦尔登证明了下面一个结果:

如果把数列 $[1,2\underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\uparrow}_{k-1}k]$ 的每个数任意涂上红色或蓝色,则必可找到一个 k 项的同色等差数列.

范德瓦尔登 1927 年证明了上述结果后,令全世界的数学

家大吃一惊！一个仅仅涉及等差数列的普通命题居然会得出如此巨大的数字，这一结果似乎是太反常了．多少年来，数学家们都试图改进范氏的证明，但无不以失败而告终．

1987年，一位以色列的逻辑学家，耶路撒冷希伯莱大学的萨哈隆·谢拉(S.Shelah)取得了重大突破，他证明了：

如果把数列$[1,2\uparrow\uparrow\uparrow k]$的每个数任意涂上红色或蓝色，则必可找到一个$k$项的同色等差数列．　　(10.5)

谢拉的贡献在于，一下子把范氏的界$2\underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}_{k-1}k$缩小为$2\uparrow\uparrow\uparrow k$．尽管，后者仍是一个非常大的数字(见§8)，但这个信息表明：舒尔定理定量刻画的界并非不能改进．况且，谢拉所用的方法更加简明，他只须证明一个简单的归纳法结论：若命题(10·5)对k项等差数列成立，则必定对$(k+1)$项等差数列也成立．

数学家永不停步，他们现在又开始对谢拉的结果大动脑筋，希望能进一步缩短那个数列的长度．1983年，著名数学家格雷厄姆在世界数学家大会上提出下列猜想：

如果把数列$[1,2\uparrow\uparrow k]$的每个数任意涂上红色或蓝色，则必可找到一个k项的同色等差数列．

这个猜想，一下子把谢拉关于$W(k)$的界从$2\uparrow\uparrow\uparrow k$缩短为$2\uparrow\uparrow k$，这里

$$2\uparrow\uparrow k=2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\quad(k\text{ 个 }2).$$

1990年，格雷厄姆在《科学美国人》杂志上重提这一猜想，并声言悬赏1000美元征求对此猜想的证明或否定．

读者们，你有兴趣攻克这一难题吗？

§11 给平面染色

拉姆赛研究了对 n 阶完全图的边的染色，范德瓦尔登考察了一个无穷数列的染色——当然，我们可以把它看成是一维空间即直线上的一串点的染色．一个很自然的联想是：我们能不能研究二维空间即整个平面上的点的染色？

二十年前，有一群数学家已经注意到这个问题了．以厄尔多斯、格雷厄姆为首的六个数学家在 1973 年开始，得到了这类染色的一系列有趣结果．他们把这种类似平面几何式的问题称为“欧几里得的拉姆赛定理”．

在拉姆赛理论中，我们接触的仅是定性的概念（同色）．而范德瓦尔登理论开始加进了“等距”（等差数列）的因素．在欧几里得的拉姆赛理论中，面对整个平面浩如烟海的五彩缤纷的点，在研究中将不得不引进“长度”的概念——这是欧几里得几何研究中的一个重要的量．

数学家们提出下面的一个问题：

把平面上的所有点作任意 k 染色，是否一定有同色的两点，它们之间的距离是单位长 1？ (11·1)

当 $k=2$（二染色）时，回答是肯定的．我们只需在平面上考察一个边长为 1 的等边三角形的 3 个顶点，它们之中必有两点同色．

当 $k=3$（3 染色）时，回答也是肯定的．我们只需考察平面上如图 11－1 的一个构图．它有 7 个顶点，11 条边，每边的长都是 1．我们论证 A,B,C,D,E,F,G 这 7 个点，它们在染

3 色时，至少出现有同色的两点，相距为 1. 不妨设 3 种颜色是红，蓝，黄，我们用反证法证明：若 7 个点染 3 色不存在距离为 1 的两个同色点，设 A 是红色，则 B,C 两点必一蓝一黄，D,E 两点亦一蓝一黄，于是 F 和 G 必是红点且相距为 1，矛盾！

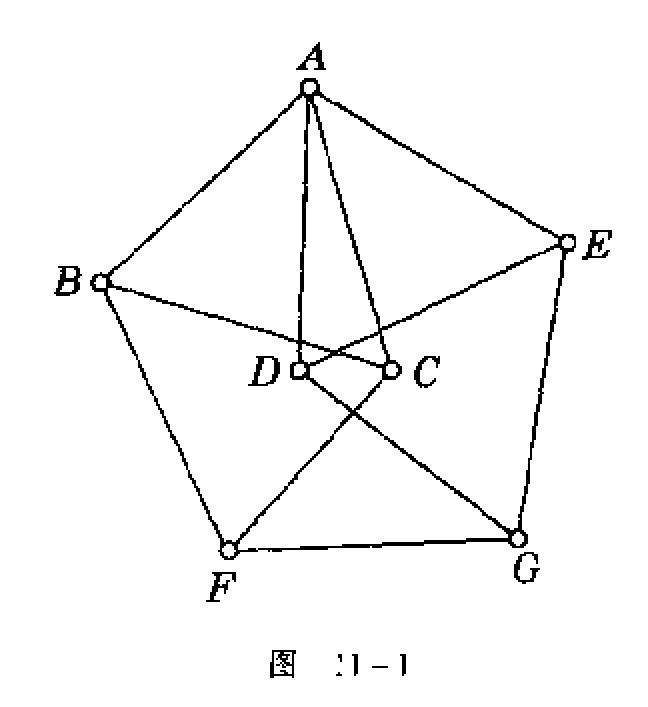


图 11－1

我们还可以知道，当 $k=7$时，回答是否定的，即我们可以设计用 7 种颜色染平面上的所有点的一种方案，使得它的任两个同色的点的距离都不等于 1.

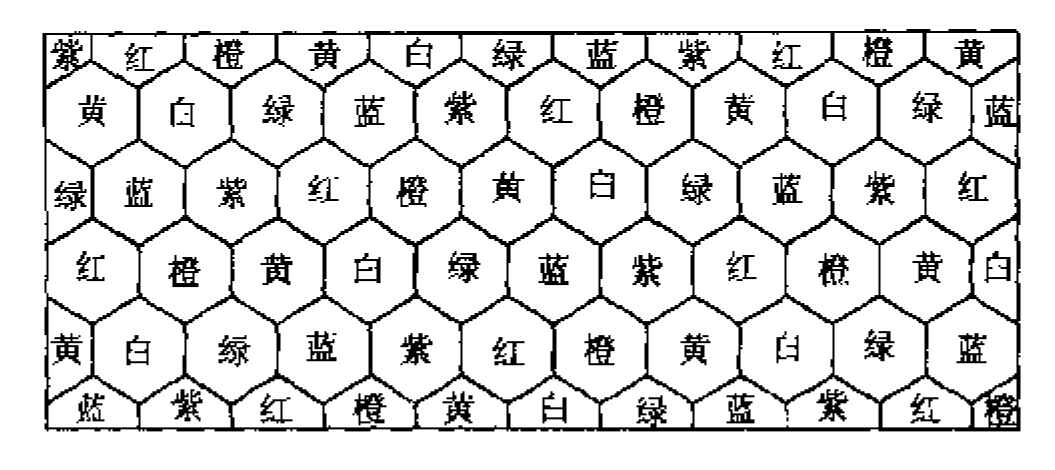


图 11－2

让我们考察图 11－2 给出的一个平面染 7 色的方案. 先用边长为 0.45 个单位长的六边形铺满全平面，然后用红，橙，黄，白，绿，蓝，紫 7 种颜色按如图 11－2 的方式去染那些正六

边形．对于每个正六边形的边界的点，我们约定它的上，下顶点与右边 3 条边上的点（不包括端点）与该正六边形同色，例如，在正六边形 $ABCDEF$（图 11－3）中，点 A，D 及边 AF，FE，ED（不包括点 F，E）与该正六边形同色．

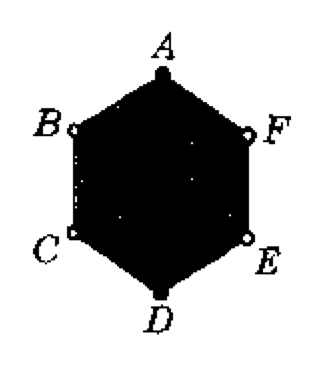


图 11－3

于是，平面上的每一点恰被染上一种颜色．现在，我们来看看，平面上同色的任两点的距离．

首先，如果同色的两点落在同一个正六边形上，因正六边形的边长是 0.45 个单位，故这同色的两点的距离不会超过 $2\times0.45=0.9$ 个单位．再看两个同色点落在不同的正六边形的情形，如图 11－4，这时，这两个同色点的距离必大于 AB 的长（注意，A，B 点都不是红色的点）．由 $\triangle ABC$ 中，$BC=0.45$，$AC=\sqrt{3}\times0.45$，$\angle ACB=150°$，根据余弦定理可算得 $AB=\sqrt{7}\times0.45>1$．

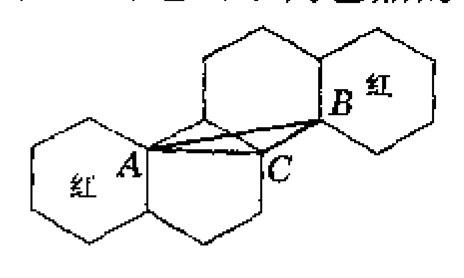


图 11－4

于是，按图 11－2 的方案，把平面上的点染 7 色，任两个同色的点的距离都不能等于单位长 1．

现在，我们已经知道，对问题（11·1）的回答，当 $k=2,3$ 时是肯定的，而当 $k=7$ 时是否定的．遗憾的是，关于这个问题，我们迄今所知道的就是这么多．我们还不能回答：$k=4,5,6$，即平面上的点染 4 色，或 5 色，或 6 色时，是否必存在两个距离为 1 的同色点．

数学家们问：能不能找到一个最小的数 k，使平面上的点存在一种 k 染色方案，它的任两个同色的点的距离都不等于

1 个单位长. 这样的一个 k 称为平面色数.

由上面的讨论,我们知道,平面色数是存在的,而且,它大于 3,不大于 7. 那么,平面色数究竟是 4,5,6,7 四个数中的哪一个呢? 这正是等待着我们——现代的数学家和未来的数学家去解决的一个问题.

请读者再回过头来,细读一下本节开头提到过的问题(11·1). 在那个问题中,涉及到四个量:第一,"平面"(2 维空间);第二,"k 染色";第三,"同色的两点";第四,"距离是单位长 1". 既然,数学家们在问题(11·1)面前被挡住去路,那么按照他们的性格,他们是决不会就此善罢甘休的,上面提到的四个量都将成为数学家们另辟新径的阶梯.

首先,他们把眼睛盯着"同色的两点"的条件,有人问:

在平面上染两种颜色,是否必存在同色的 3 个点,它们每两点的距离为单位长 1. 换句话说,是否必存在同色 3 点组成的边长为 1 的等边三角形. (11·2)

回答是否定的. 我们只要设计出一种染两色的方案,使平面上无同色 3 点组成的边长为 1 的等边三角形即可. 请看

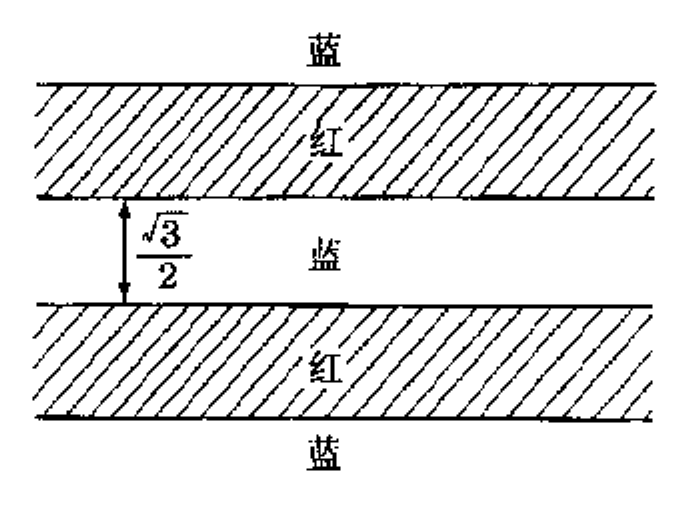


图 11-5

图 11－5，把整个平面划为彼此平行的宽为$\frac{\sqrt{3}}{2}$单位长的带形区域，用红，蓝相间地染这些带形区域，每种颜色染一个带形区域及它的下边界，但不染它的上边界．容易证明：平面上这样的二染色，不存在同色的 3 个点，以它们为顶点组成一个边长为 1 的等边三角形．

虽然，问题(11·2)的结论是否定的．但是，由此，我们却可以导出下列两个有趣的结论．

结论 1：在平面上染两色，若不存在顶点同色的边长为 1 的等边三角形，则必存在顶点同色的边长为$\sqrt{3}$的等边三角形．

结论 2：在平面上染两色，若存在顶点同色的边长为 1 的等边三角形，则必存在顶点同色的一边长为 1 的任意三角形．

让我们一起探讨一下上述两个结论的证明．

先看结论 1．

如果平面上染红、蓝两色，不存在顶点同色的边长为 1 的等边三角形，则必有两个距离为 1 的不同色的点，以此两点的连线为底（长为 1）作腰长为 2 的等腰三角形，则此等腰三角形的顶点必与另一个顶点异色（图 11－6），也就是说，我们在平面上必可找到两个距离为 2 的不同色的点，设这两个点为 A，B，不妨设 A 是红色点，B 是蓝色点（图 11－7）．

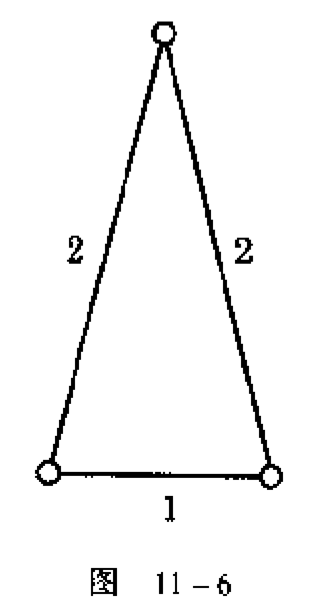


图 11－6

设线段 AB（长为 2）的中点是 C，则 C 必与 A 或 B 之一同色．不妨设 C 是红色点．以长为 1 的 AC 为一边作两个等边三角形 ACD 和 ACE．因为平面上不存在顶点同色

的边长为 1 的等边三角形，故点 D 和 E 必是蓝色点．于是，我们便得到一个顶点为蓝色的边长为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形 DEB．

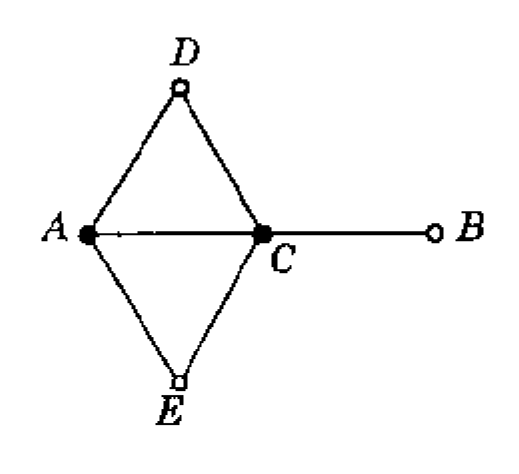


图 11－7

结论 1 的证明，很有些拉姆赛定理的"味道"．事实上，结论 1 还可以叙述为这样的等价命题：在平面上任染两色，必存在一个边长为 1 或 $\sqrt{3}$ 的正三角形，它的三个顶点是同色的．

再看结论 2．

在平面上任意染红，蓝两色．若存在一个边长为 1 的正三角形 ABC，顶点 A，B，C 均为红色点，则必存在顶点同色的一边长为 1 的任意三角形．

我们考察以 AB 为边的任意一个三角形 ABD．这是一个有一边长为 1 的三角形，只须证明，平面上存在一个顶点同色的这样的三角形．

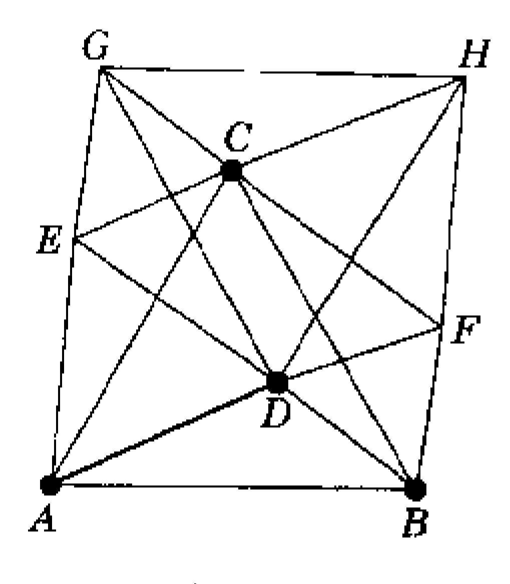


图 11－8

我们看图 11－8，这里有四个等边三角形 $\triangle ADE$，$\triangle DBF$，$\triangle CFH$，$\triangle ECG$．容易证明，下面的六个三角形是全等的：$\triangle ABD$，$\triangle ACE$，$\triangle CBF$，$\triangle DGE$，$\triangle HDF$，$\triangle HGC$．

若 D，F，E 中有一点是红色点，则结论 2 得证，故只须考察 D，F，E 均是蓝点的情形．又若 G，H 有一是蓝点，则结论 2 得证，故考察 G、H 均是红点的情形，这便得到 $\triangle HGC$ 是所

求的三角形.

这便完成了结论 2 的证明.

从问题(11·2)的否定回答到上述两个结论的证明,都围绕着一个边长为 1 且顶点同色的正三角形. 在平面的二染色中,这个边长为 1 的正三角形是问题的关键所在. 以厄尔多斯为首的六位数学家已注意到了这一点. 1973 年,他们提出了这样的猜想:

把平面上的点任意染两色,除了正三角形外,存在一切顶点同色的三角形,当然也包括三顶点共线的情形.

十三年后,即 1986 年,两位数学家佛朗克尔(P. Frankl)和洛德尔完全证明了这个猜想.

当然,对于这类欧几里得的拉姆赛问题,我们还可以作各种推广.

例如,仿照图 11-1 的方法,我们可以证明:

在平面上任意染三色,必存在任意距离的两个同色的点.

把平面(二维空间)推广到空间(三维空间),可以证明:

把空间上的点任意染两种颜色,必存在有顶点同色的任意三角形,包括三顶点共线的退化三角形.

我们还可以把问题推广到对平面上的某些图形(如三角形)的边界染色,对平面的整点(坐标为整数的点)染色,空间的立方体染色等,从而产生出形形色色的有趣问题和不平凡的结论,让我们从无序中发现有序.

然而,一个最吸引人,又最困惑人的问题却是下面一个给地图染色的问题.

§ 12　四种颜色就够了？

这是一个“用不了一分钟就能说清楚，但即使是全人类的力量，成百年也难以解决”的问题.

事情追溯到 19 世纪的欧洲.

1852 年，刚从英国伦敦大学毕业的弗兰西斯·格斯里(Francis Guthrie)写信给他的弟弟，伦敦大学学生弗雷德里克·格斯里(Frederick Guthrie). 在信中，弗兰西斯要求他的弟弟从数学上证明下面一个似乎十分明显的事实——称为四色猜想：

每一幅画在一张纸上的地图都可以用四种颜色来染色，使具有公共边界的国家有不同的颜色.

弗雷德里克不能回答这个问题，他去请教他的老师，著名数学家德·摩根(Augustus De Morgan).

德·摩根着手研究这个问题，但他很快就意识到在他的面前不是一块小石头，而是一座大山.

当然，弗兰西斯所谈的相邻的国家，是指那些沿着一条边界线而不只是在一个点上邻接的国家，而要染色的地图必须是由所有这样方式邻接的国家组成. 否则，如图 12－1 的“地图”的七个三角形国家就要用七种颜色了.

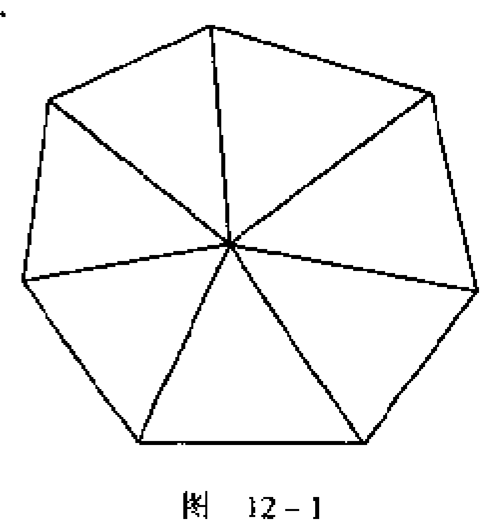


图　12－1

其次，弗兰西斯的地图中的同一个国家必须是连成一片的，即不能出现地理学中称为的“飞地”．例如，像美国的阿拉斯加那样的领土，在弗兰西斯的地图中是不允许出现的．否则，我们很容易举出一个反例来否定四色猜想．只需要考察图 12－2 中的“地图”中的 A,B,C,D,E 5 个国家，就必须用 5 种不同颜色去着色．

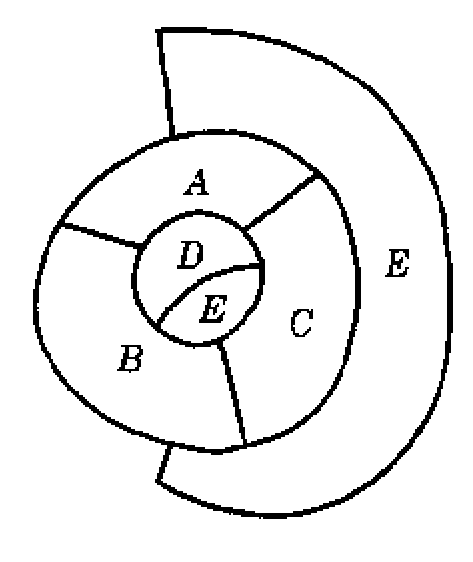


图 12－2

德·摩根一开始就意识到，如果四色猜想成立，4 将是颜色的最小数目．因为很容易举出一幅由 4 个国家组成的符合规定的地图，它用三种颜色是不够的．图 12－3 就是这样的一幅地图．在这幅地图中，国家 A,B,C,D 的每一个都和其余 3 国相邻．因此，显然需要四种颜色．

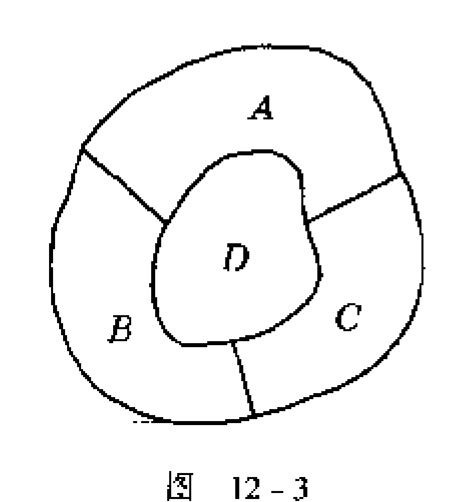


图 12－3

德·摩根证明了：五个国家不可能排成这样的位置，使其中每一个国家与其余四个国家都相邻．因此，他坚信：要实现地图着色，四种颜色已经够了，不需要五种颜色．他深信四色猜想是对的．

千万不要认为，德·摩根的上述结论就证明了四色猜想．有些人独立发现了这一结论，便宣布自己证明了四色猜想．要知道，地图着色所需的色数并不一定等于彼此相邻国家的最大数目．请看图 12－4 的地图，没有三个以上的国家彼此相邻，但它还需要四种颜色——中间国

家一种，外圈的国家三种.

德·摩根感到自己的能力不足，他写信请教爱尔兰的著名数学家哈密顿(Hamilton).

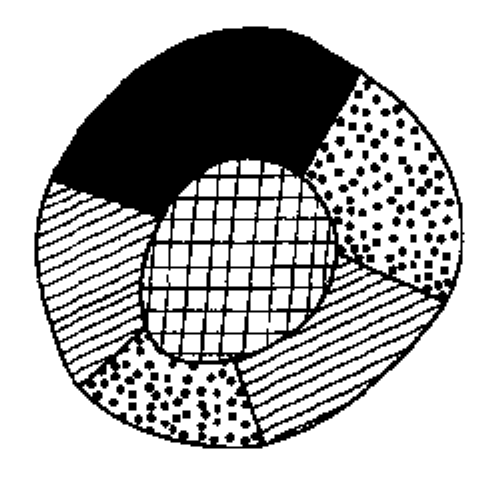


图 12-4

哈密顿对此问题不屑一顾，他回信说，没有时间去考虑这个问题.

然而，四色猜想在数学家的圈子和大学的论坛中不胫而走.

据说，颇负盛名的数学家闵可夫斯基(Minkowski)在一次讲授拓扑课前，一个学生向他请教这一问题. 这位数学教授漫不经心，拿起粉笔，立即在黑板上打算把证明写出来. 但涂画了两节课，结果如何，读者可想而知了.

这个貌不惊人的猜想一次又一次向最有才华的数学家发出挑战，似乎在嘲笑人类的无能. 这不能不使数学家们认真起来了.

1878 年，英国著名的数学家凯莱(Arthur Cayley)经过一番苦思后亦未能证明或否定四色猜想，便把这个问题正式提交给伦敦数学会.

于是，更多的专业数学家和业余数学家对这个问题的证明跃跃欲试.

有些人以为：把当今世界的地图用四种颜色去涂染，使之无相邻两国同色，就是成功地解决了这个问题，甚至宣称，因为已经制造了这样的地图，所以四色猜想被成功地证明了. 这不能不说是一个无知的说法.

为了了解四色猜想的实质，我们先探索一下这一问题的

数学意义.

四色猜想的对象是一幅地图. 所谓地图是一个地理学的概念. 我们可以用数学上的所谓平面图的概念去描述它,即用下面的方法把一幅地图变成它的对偶形式.

把地图上的每个国家看作是一个顶点(或者认为是该国家的首都),若两个国家有公共边界,就在代表这两个国家的点间连上一条线,称为边(不一定是直线). 这样的一个图称为地图的对偶图. 图中有边相连的两点称为相邻点. 一个点的相邻点的个数称为这个点的次数. 见图 12-5 的粗线所成的图.(不考虑最外的一个区域)

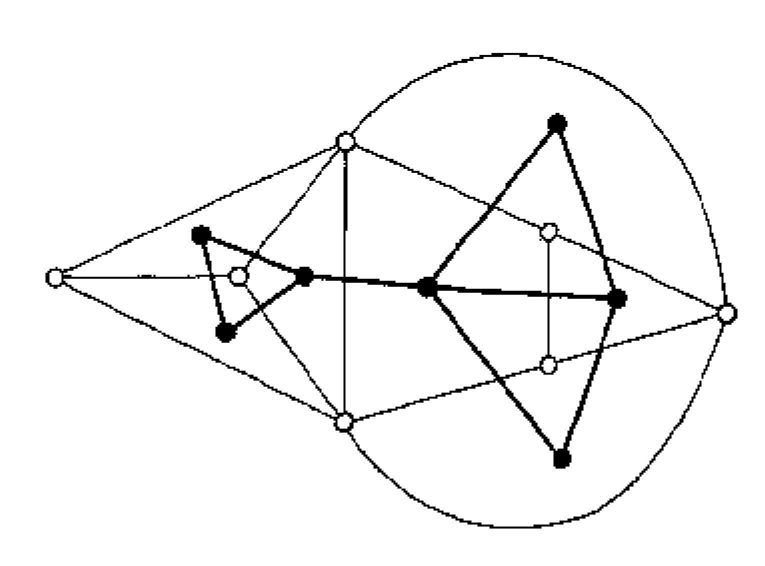


图 12-5

我们将会发现,一个地图的对偶图的边,除了可能在顶点上相交外,都无其他交点,这样的图统称为平面图. 当然, 有些图乍看起来不是平面图,但如果把它的边理顺后(也可看作能伸

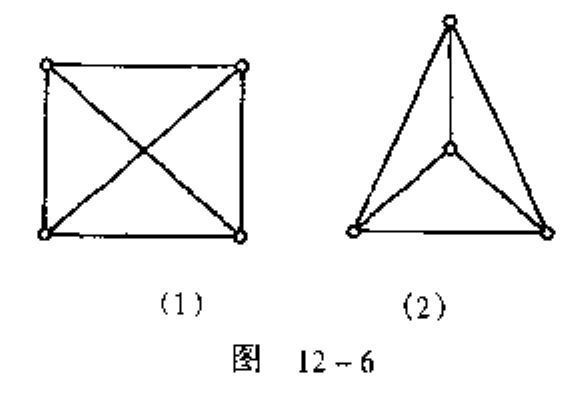
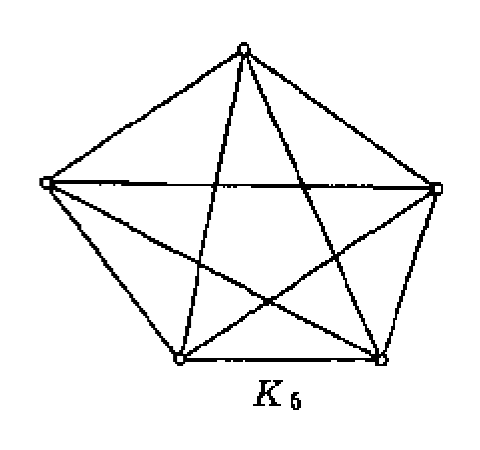


图 12-6

缩),就可以铺在平面上,互不交叉. 例如图 12-6(1)的边是交叉的,但可把它改成图 12-6(2),这两个图是同构的. 这种理顺边后把一个图变成平面图的操作,称为图的平面嵌入.这种嵌入,就好像铺设一块集成电路板一样. 当然,并不是每一个图都是平面图,即并不是每一个图都能实现平面嵌入. 例如图 12-7 所示的两个图(一个称为 K_5, 一个称为 $K_{3,3}$)就不是平面图,无论你用什么方法来描画它的边,总不能得到它的平面嵌入. 你不妨试试看.



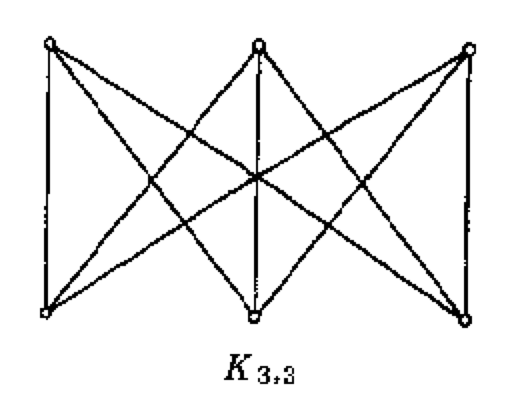


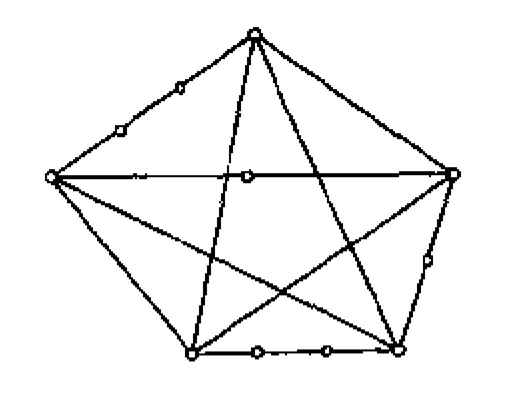
图 12-7

如何判断一个图是否是平面图,曾经在相当长时间内是一个历史上的难题.

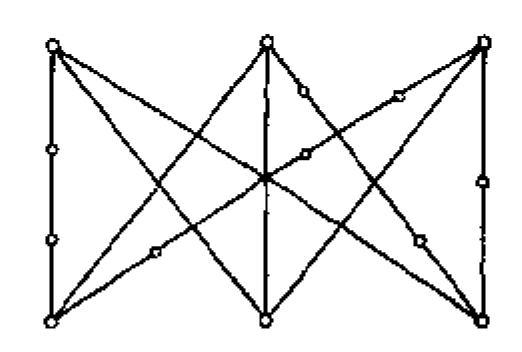
1930 年,波兰数学家库拉托斯基(Kuratwski) 解决了这个难题,他证明了判断一个图是平面图的下面一个准则:一个图是平面图当且仅当它不包含 K_5 或 $K_{3,3}$的剖分图.

K_5, $K_{3,3}$就是图 12-7 所示的两个图.而所谓剖分图就是 K_5, $K_{3,3}$的边任意添加一些顶点所得到的图,如图 12-8 所示.

有时,我们不用"剖分"的概念,而改用"收缩"的概念. 对于一个图 G 来说,把两个顶点 u 和 v 收缩,即意味着把这两



K_5 的一个剖分图



$K_{3,3}$的一个剖分图

图 12-8

个点缩为一个点w，原来与u或v邻接的点均与w邻接. 因此，图 12-8 中的两个图，可以把它们的一些顶点收缩，变成 K_5 和 $K_{3,3}$. 上述库拉托斯基关于判断平面图的准则，也可以等价地叙述为：一个图是平面图当且仅当它不包含能够收缩为 K_5 或 $K_{3,3}$的图.

如果我们把一个平面图画在一个球面上，再作适当的变形——把球面看作可伸缩，熨平的胶球，便可以得到一个多面体. 例如，图 12-6(2)可看成一个四面体，具体的变形请参见图 12-9.

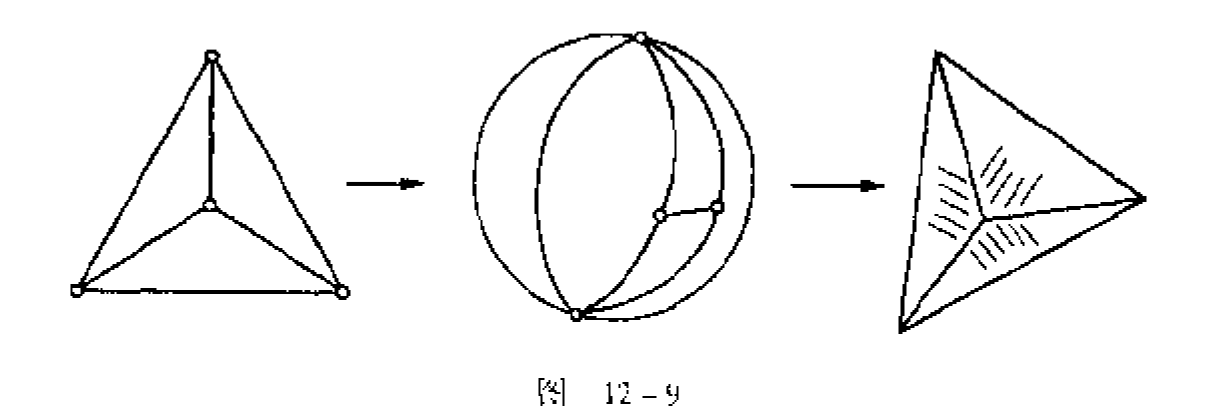


图 12-9

在中学教材中我们已经知道，关于多面体的欧拉公式——顶点、棱、面数关系公式同样适用于平面图．如果一个平面图有 n 个顶点，m 条边和 f 个面（平面被边分成的各部分），则由著名的欧拉公式，有 $n-m+f=2$.

运用平面图的欧拉公式，我们可以证明：平面图中至少有一个顶点，它的次数不大于 5．只需用反证法证明．若上述结论不成立，即图的每个顶点次数都大于或等于 6，便有

$$6n\leqslant 2m \text{（因每边有两个顶点）}.$$

又因为平面图的每个面至少有 3 条边，便有

$$3f\leqslant 2m.$$

由欧拉公式

$$2=n-m+f\leqslant\frac{1}{3}m-m+\frac{2}{3}m=0,$$

矛盾！于是便证得结论．

既然，地图的对偶图必是一个平面图，上述结论就意味着：一幅地图中至少有一个国家，它的邻国的个数不大于 5．这将是我们研究四色猜想的关键．

进一步，我们可以把地图中国家的染色问题转化为平面图顶点的染色问题．于是，四色猜想便可表述为下面的一个数学问题：

用四种颜色对一个平面图的顶点染色，必可使相邻的顶点具有不同的颜色．

就在伦敦数学会宣布征解四色猜想的第二年，即 1879 年，凯莱的学生，一个律师兼数学家肯普（A. B. Kempe）声称：他找到了四色猜想的证明．

§ 13 肯普，光荣的失败者

美国的肯普发表了他证明四色猜想的 8 页论文——这是 1879 年震动数学界的一件大事.

不少数学家对肯普的成果给予了高度的评价，不久，肯普被选为英国皇家学会院士.

肯普证明四色猜想的基本思路是反证法. 他首先假设猜想不真，即至少有一张地图需要五种颜色来染，然后着手揭示这个假设将引起矛盾. 从而证明原先的假设是错误的，故四色猜想成立，用四种颜色就够了.

下面我们将要看到，肯普的证明设计得非常巧妙. 以致在其后的十年间，数学界都公认为肯普已经圆满地解答了四色问题，甚至一所中学的校长把这个问题列为校内数学竞赛的有奖征解题，并附加条件，要求学生"解答只准写满一页，三十行横写，另可多加一页图画"！

可是，谁也不能料到，在肯普的"证明"发表了 11 年以后，英国一个数学家希伍德(Heawood)并未随波逐流，他发现了肯普论文中的一个漏洞，而且是一个不容易修补的漏洞. 用肯普的方法，只能证明：用五种颜色就够了.

不久，肯普本人向伦敦数学会报告了希伍德的结果，他同时承认：作为解决四色猜想，自己的证明是错的，而且是一个暂时无法修正的错误.

在学术界，对肯普的证明和希伍德的工作已有定论. 可是，在其后相当长的一段时间里，民间的不少书本杂志还在对

肯普的错误结果津津乐道.

科学家是老实人,曾经一度沉浸在胜利喜悦中的数学家们再度对四色猜想作了冷静的思考. 他们肯定了肯普证明中的基本思路.并从这个思路出发,为修补肯普证明的漏洞作了不懈的努力.终于导致了一百年以后的成功.

希伍德继续了肯普的工作,研究了四色猜想不下六十年. 他把画在平面上的地图的染色问题(四色猜想)推广到更复杂的曲面上的地图的染色问题,得到了很多精彩的结论.

可是,四色猜想仍然没有解决.

由于肯普的证明对四色猜想的研究发生着重大的影响,因此就让我们来分析一下肯普论证中的聪明的思路.

肯普首先引进了一个"正规地图"的概念. 一幅地图,如果其中任一个国家都不把其他国家包围起来,并且在任一点上交会的国家不多于 3 个,那么这幅地图称为正规地图. 例如,图 13-1(1)所示的地图便是一幅正规地图. 正规地图有一个显著的特点,就是把它的对偶图的边都画成直线段后,对偶图中的各个面都是三角形,我们把它称为平面的三角剖分,如图 13-1(2)所示:

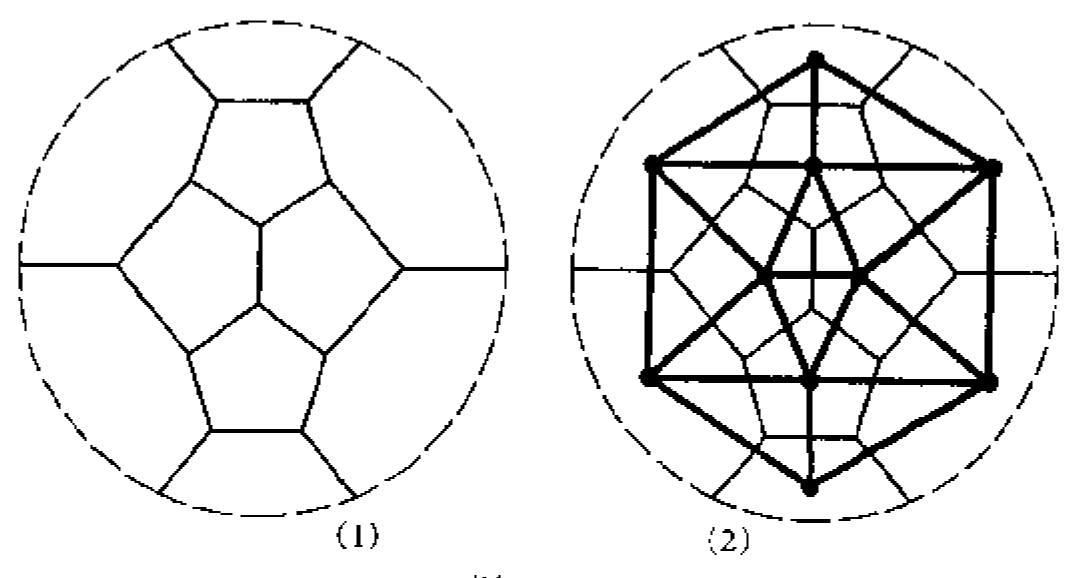


图 13-1

肯普正确地证明了：如果四色猜想对正规地图成立，那么它就对所有的地图成立．因此，我们只需对正规地图证明四色猜想就行了．

按照肯普的反证法思想，只需证明：不可能有正规的且需要5种颜色去染的地图——称为正规五色地图．若存在正规五色地图，则必有一幅国家数最小的正规五色地图（即再减少一个国家，便能用四色来染），称为最小正规五色地图．要证明四色猜想，只需要证明：最小正规五色地图不可能存在．

肯普首先证明：任何正规地图中必存在一个国家，它的邻国个数不大于5，即地图的对偶图有一点的次数$\leqslant 5$，这在上一节已经证明了．

假设有一幅最小正规五色地图存在，肯普证明，可以找到一幅国家数更小的正规五色地图，于是，与上面的"最小"性矛盾！

他分下面几种情况去证明：

（1）若有一个国家与两国相邻，则可导出矛盾；

（2）若有一个国家与3国相邻，则可导出矛盾；

（3）若有一个国家与4国相邻，则亦可导出矛盾；

最后，也是剩下的一个情形，

（4）若有一个国家与5国相邻，则同样可导出矛盾！于是任何情形都可导出矛盾．

肯普前面三步的证明都是对的，不幸的是（也是被希伍德所发现出来的）最后一步，即"有一个国家与5国相邻"的证明中，出现了不易修正的错误！

肯普的证明虽然错了，但在他的思考过程中，却闪烁着两点照亮后人前进道路的思想火花．

他的第一个重要思想是研究了不可避免性．既然，每一

幅正规地图,必有一个国家至多具有5个邻国,那么,每一幅正规地图至少含有下列四种构形的一种,即存在一个国家有2个邻国,3个邻国,4个邻国或5个邻国(图13-2).

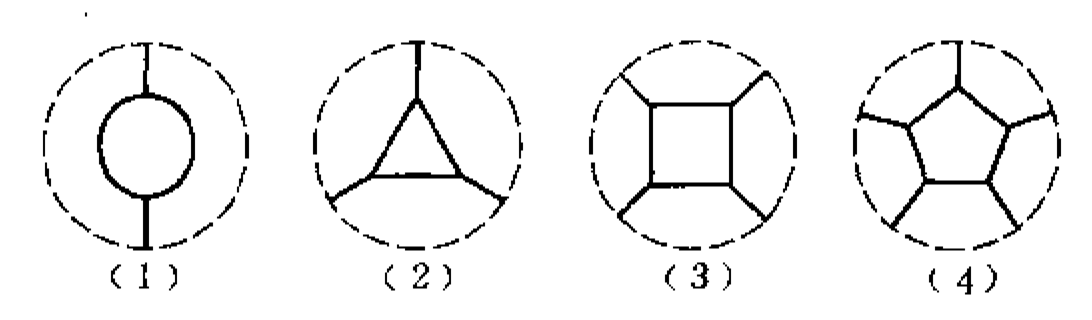


图 13-2 中间的国家分别与2,3,4,5个国家相邻

这四种构形组成的集合,称为不可避免集.

肯普证明中的第二个重要思想是研究可约性. 若一种构形不可能出现在最小正规五色地图中,则这种构形便称为可约构形. 所谓可约构形,也可以解释为:若最小正规五色地图出现这种构形,它就可以导出一个国家数更小的五色地图,因而与"最小"性矛盾.

肯普的出色想法就是:只要能证明不可避免集中的每个构形都是可约的,四色猜想就证出来了. 换言之,肯普试图寻求一个由可约构形组成的不可避免集——这一思想成了后世数学家攻克四色猜想的锐利武器.

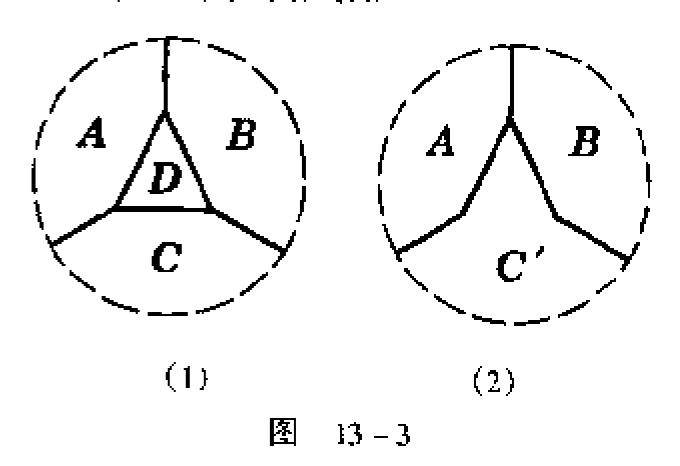


图 13-3

让我们沿着肯普的足迹再多走几步.

对于不可避免集中的图 13-2(1),(2),(3)所示的情形,他是成功了.

他是这样处理具有 3 个邻国的情形的. 如图 13-3 的情形(1),一幅最小正规五色地图上,有一个国家 D 和 3 个国家 A,B,C 相邻. 把 D 和它的邻国 C 结合成一个国家 C',如图 13-3(2)所示,于是,新地图的国家数比原图要少,因此,能用四种颜色来染. 把这幅染了四色的地图恢复原来的国家 D,C,只需把 D 染上四色中与 A,B,C' 不同的另一种颜色,便得到一张四色地图,这与原图是最小五色地图矛盾!

再看肯普是如何证明有一国与 4 国相邻的情形.

假设存在一幅最小正规五色地图,如图 13-4 所示,有一个国家 E 与 4 个国家 A,B,C,D 相邻. 类似上面的方法,把 E 与某一邻国结合起来看成一个国家,新地图便有一种四染色方法. 当然,如果 A,B,C,D 所使用的颜色少于四种,那么

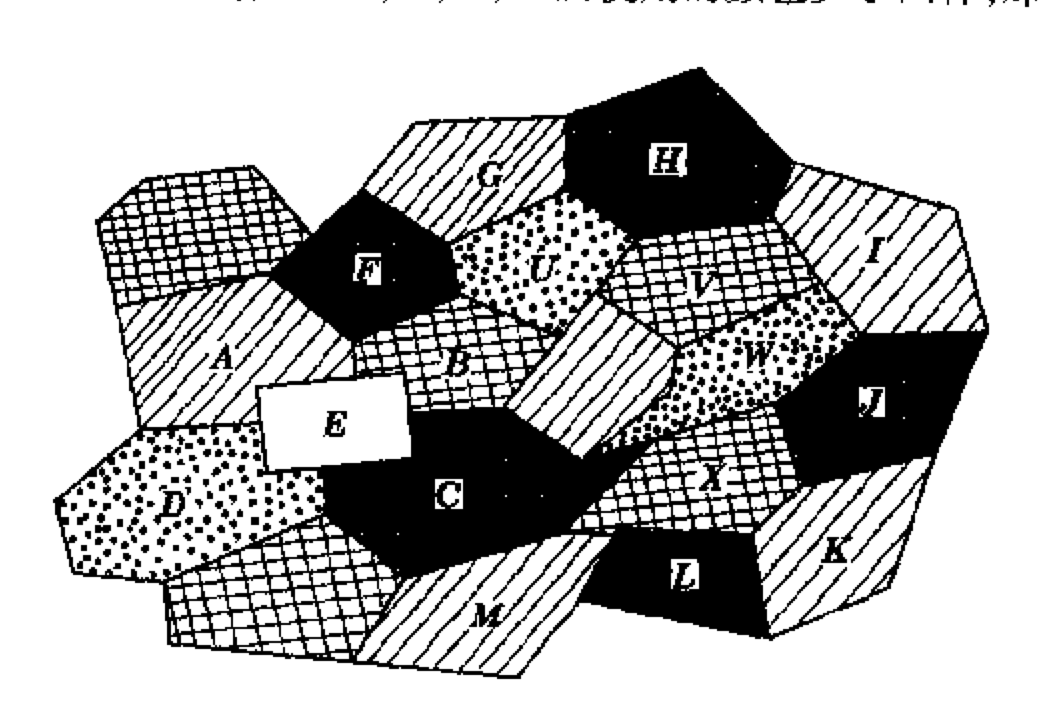


图 13-4

未用的一种颜色染 E，便可证明原地图是一幅四色地图而非五色地图．因此，我们只需考虑 E 的邻国 A,B,C,D 染四种颜色的情形，如图 13－4 所示．

我们在图 13－4 中分别用▨，■，▩，▒代表红，黑，蓝，黄四种颜色．

先看 E 的一对红，黑邻国 A,C，如果我们从 A 出发找一连串红黑相间且相邻的国家一直到达 C，就说存在一条由 A 到 C 的红，黑相间路．从图 13－4 中可看出，可以找到一条从 A 到 C 的红黑相间路 $AFGHIJKLMC$（读者也可以用对偶图的观点考察它）．这样，我们转而看 E 的另一对蓝，黄邻国 B,D．

可以肯定，从 B 到 D 不再存在一条蓝黄相间路．否则，可以证明：从 A 到 C 的红黑相间路与从 B 到 D 的蓝黄相间路必有一个公共国家（即对偶图中的公共顶点），这个公共国家不得不染上两种不同颜色，这与染色规则矛盾．因此，E 的两对邻国中，必有一对不存在相间路．在图 13－4 中，从 B 到 D 不存在蓝黄相间路，只有从 B 到 X 的蓝黄相间路 $BUVWX$．

现在，我们把蓝黄相间路 $BUVWX$ 中的蓝黄两色调换，得黄蓝相间路 $BUVWX$（图 13－5），于是，国 E 的邻国只染了三种颜色红，黑，黄，只须把 E 染上蓝色，便可得到此最小五色图的一个四染色方法．这个矛盾表明：具有四个邻国的国家，不能成为最小五色图的一部分，即不可避免集中图 13－2(3) 是可约的．

沿用这样的思路，肯普向最后的一种情形即最小五色地图中有一个国家与 5 国相邻的情形发起冲击．他"证明"了这一情形亦可导出矛盾．肯普证明的大致思路是这样的：

设在一个最小五色地图中，有一个国家 F 与 A,B,C,D，

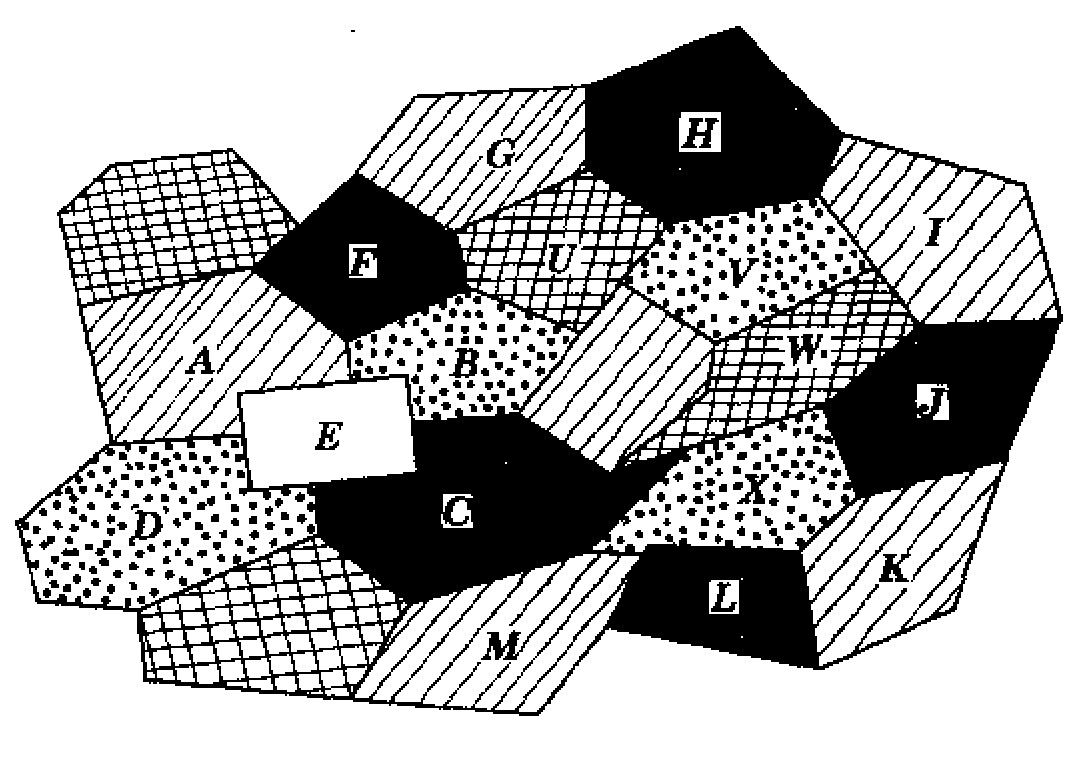


图 13-5

E5 国相邻. 如同上面的分析,我们只须考虑合并了国家 F 后的那张四色地图里,A,B,C,D,E 分别染四种不同颜色的情形. 不妨设 A,B,C,D,E 分别染红,蓝,红,黄,黑色,沿用图 13-4 的标记,画出示意图如图 13-6 所示. 肯普的想法是在 A,B,C,D,E 中,找寻不含相间路的两对点. 若 B 到 E 有一条蓝黑相间路,B 到 D 亦有一条蓝黄相间路,则从 A 到 D 必无红黄相间路. 从 C 到 E 亦必无红黑相间路,于是,把从 A 出发的红黄相间路(它不到达 D)的红黄色对调,把从 C 出发的红黑相间路(它不到达 E)的红黑对

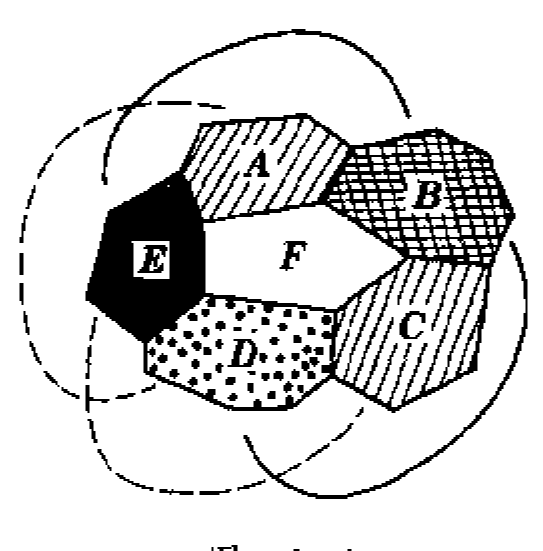


图 13-6

调，使得 A 与 D 间是黄色，C 与 E 间是黑色如图13－7所示，于是 F 的邻国只用了三种颜色，把 F 染上第四种颜色，例如红色，便得到原来地图的一种四染色，这与最小五色地图的假设矛盾！

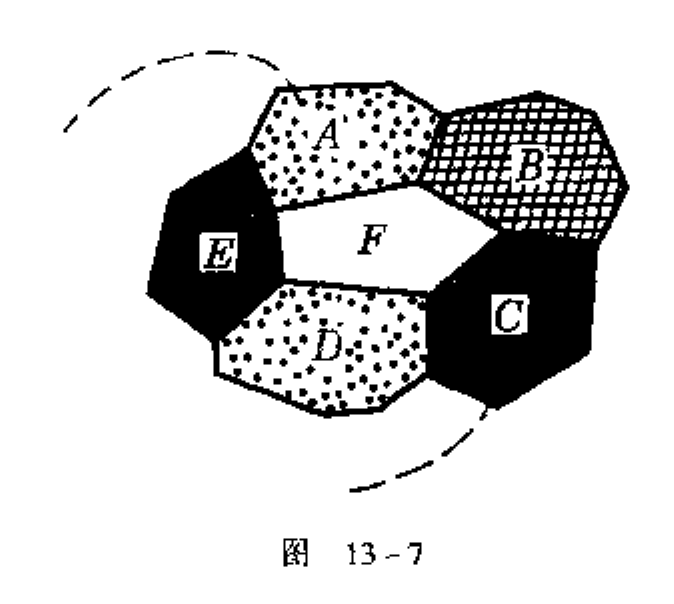
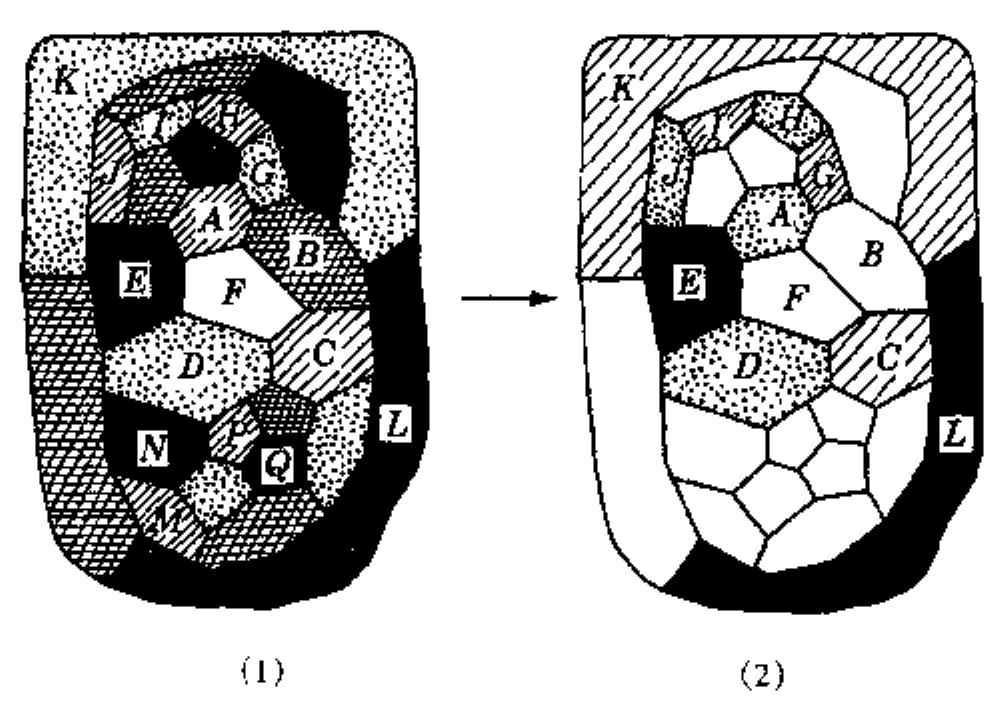


图 13－7

肯普以为，他的大功告成了．可是，希伍德却看出了这一步的漏洞．问题就出在：当把从 A 出发的红黄相间路对调颜色时，可能会制造出一条从 C 到 E 的红黑相间路（在此以前，这是不可能出现的），这时，当我们再把红黑两色对调时，只不过把 E 换成红色，C 换成黑色而已．F 的邻国仍有四种颜色，F 必须染上第



（1）　（2）

图 13－8

5种颜色才行．为了说明肯普这一思路的疏忽，希伍德给出了一个反例．

图13－8就是一个局部的反例，它否定了肯普的证明．在图13－8(1)中，F有五个邻国，如上述证明一样，它们被染上四种颜色．由A国到D国不存在红黄相间路，由C国到E国也不存在红黑相间路．于是，遵照肯普的做法，把由A出发的红黄相间路(必不到达D国)$AGHIJK$的红，黄两色对调，便得图13－8(2)所示的黄红相间路$AGHIJK$．然而，问题就出在这里，现在，由C到E出现了一条新的红黑相间路$CLKE$，于是把此路红黑色对调，只能使C由红变黑，E由黑变红，F的邻国仍然是四种颜色——这与肯普期望出现三种颜色的目标相违背．

肯普的努力是失败了．他，一个真正的数学家，在真理面前勇敢地正视了自己的错误．

然而，历史没有忘记肯普的贡献．数学家们赞扬“肯普的论证是极为聪明的，虽然他的证明是不完全的．”在肯普以后，众多研究四色猜想的数学家基本是沿着肯普的思路走下去的．

在1976年，成功地用机器方法证明了四色猜想的美国数学家阿佩尔(K. Appel)和黑肯（W. Haken）说：“我们的方法基本上是肯普证明中正确部分的推广，这些部分在过去的一百年中，一直受到数学家们的密切注意和精心提炼．”

一部数学史，是失败与成功交织的历史．在四色猜想证明的征途中，肯普是一位光荣的失败者．

§14 退一步——五色定理

英国数学家希伍德用一个反例捅出了肯普四色猜想证明中的一个漏洞．然而，希伍德却指出，运用肯普的想法，事实上已经证明了五色定理，即每一幅画在平面(事实上也可画在球面)上的地图，都可以用五种颜色来染色，使具有公共边界的国家有不同的颜色．

从§13的分析中，我们已经领会了这一证明．

把四色猜想减弱为五色猜想，我们便可不费多少功夫把猜想证出来．

下面，我们不采用肯普的叙述而运用对偶图的观点，把五色定理的证明写出来．

首先，按照对偶图的观点(见§12)，四色定理等价于：对一个平面图上的顶点染色，相邻两顶点颜色相异，至少用四种色就够了．

如果把对偶图的顶点的上述染色所需要的最小颜色数记为图的色数，则四色猜想等价于：平面图的色数$\leqslant 4$．

现在，我们证明下列的五色定理：

$$\text{平面图的色数} \leqslant 5. \tag{14·1}$$

为了使我们能更自如地用数学的语言证明五色定理，在我们的叙述开始以前，先了解一些图论的语言．

一个图 G 的子图，是指所有顶点和边都属于 G 的一个图．例如，图 14－1 中图 G_1，G_2 都是图 G' 的子图．当然，我们本书§1开始的拉姆赛定理，事实上就是从染两色的图 K_6 中

寻找同色的子图 K_3.

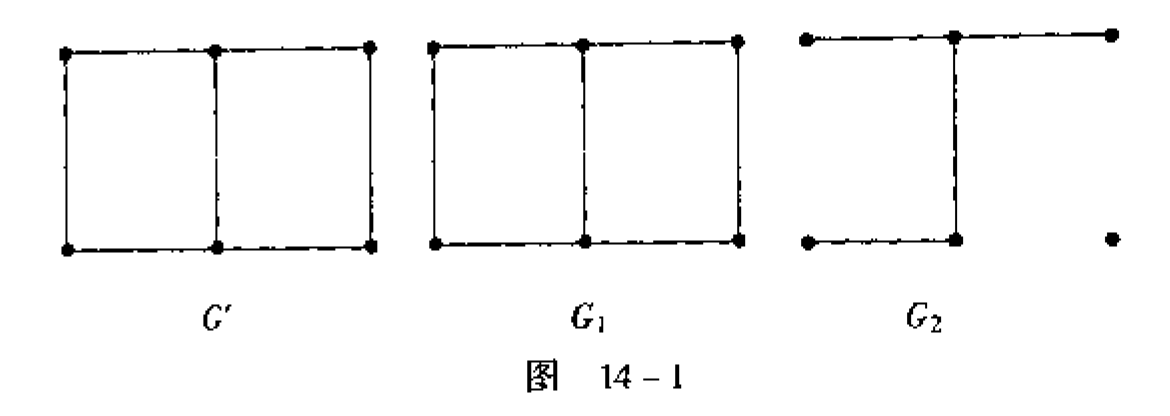


图 14-1

在§7中,我们已经叙述过关于连通图的概念. 例如,在图 14-1 中,G',G_1 均是连通图,而 G_2 不是连通图. 图 G 的一个最大的连通子图称为 G 的一个连通支. 连通图只有一个连通支,而不连通图至少有两个连通支. 例如,图 14-1 中的图 G_2 就包含两个连通支(其中一个连通支仅含一个点).

现在,我们叙述五色定理的证明.

证明: 设平面图 G 的顶点数为 n,对 n 用数学归纳法.

当 $n \leqslant 5$ 时,命题(14·1)显然成立.

设对顶点数为 $n-1$ 的平面图,命题(14·1)成立. 现在,我们考察顶点数为 n 的平面图.

我们已经知道平面图 G 必含有一个次数不大于 5 的顶点(见§12),设这个顶点是 V.

从 G 中把顶点 V 及与 V 关联的边去掉,剩下的图称为 G'. 显然,G' 的顶点数是 $n-1$.

由归纳假设,G' 的色数 $\leqslant 5$,即用五种颜色 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 染 G' 的顶点,可使它相邻的顶点有不同的颜色.

下面,我们分两种情形讨论 V.

情形 1: 若顶点 V 在图 G 中的次数小于 5,则 V 的相邻

点用的颜色数小于 5，把 V 染上与相邻点不同的颜色（当然，应是 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 中的一种），便知，G 的色数 $\leqslant 5$.

情形 2：若顶点 V 在图 G 中的次数等于 5. 显然，我们只需考虑 V 的邻点颜色各异的情形.

设 V 的相邻点是 V_1, V_2, V_3, V_4, V_5，它们分别（在 G' 中）被染上 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 色. 我们考察 V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 中的任意两点，例如 V_1, V_2.

注意到 V_1, V_2 分别染 C_1, C_2 色. 我们考察图 G' 中所有染 C_1, C_2 颜色的点及它们之间的边（如果有的话）所成的子图. 为便于叙述，把这些子图记为 $G'(C_1, C_2)$.

若 $G'(C_1, C_2)$ 中有一个连通支只含 V_1 不含 V_2，则把此连通支的 C_1, C_2 两色对调，就得 V_1 染 C_2 色，V_2 也染 C_2 色. 于是，令 V 染 C_1 色，便得 G 的一个符合条件的五染色，如图 14－2 所示.

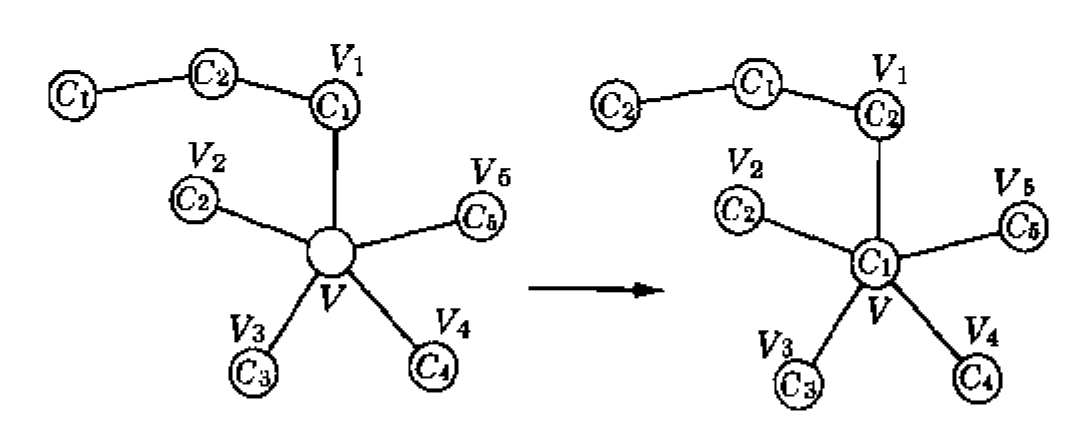


图 14－2

若 $G'(C_1, C_2)$ 不存在只含 V_1 不含 V_2 的连通支，即 V_1, V_2 必在 $G'(C_1, C_2)$ 的同一个连通支中，等价地，从 V_1 到 V_2 有一条 C_1C_2 的相间路.

上面的证明，适用于 V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 中的任两点. 于

是，若命题(14·1)不成立，则 V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 任两点之间都有一条两色的相间路，这便形成了 G 的一个子图：K_5 的剖分图(或收缩为 K_5，见图 14-3 及 § 12 图 12-8)，由库拉托斯基定理(见 § 12)，G 不是平面图. 矛盾!

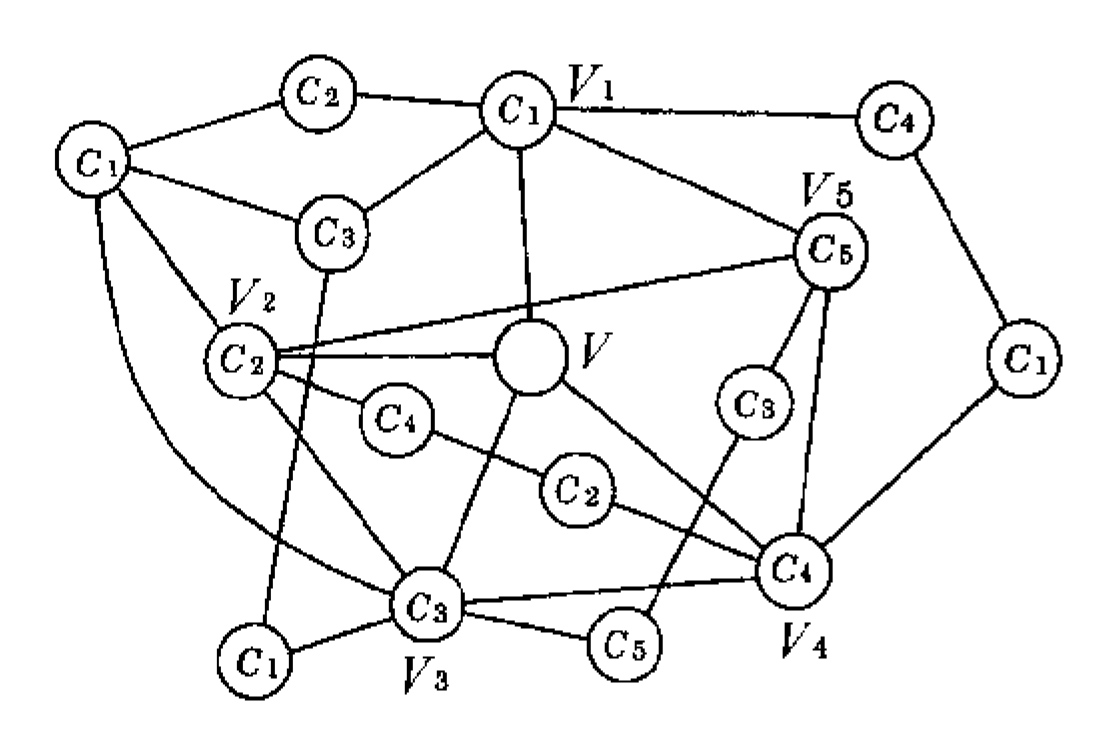


图 14-3 V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 成一个 K_5 的剖分图(或收缩为 K_5)

至此，我们完成了五色定理的证明. 事实上，在证明中，图 14-2，图 14-3 是不必要的，画出来仅仅是帮助阅读理解而已.

五色定理证明出来了. 有人认为：四色猜想的证明已是指日可待了.

不要以为：从五色定理到四色定理仅是一步之遥，数学家为了跨过这一步，足足花了差不多一百年呢!

§ 15 泰特的冲击

19 世纪 70 年代是四色猜想的“热门”年代.

1878 年,凯莱向英国伦敦数学会提交了四色猜想.

第二年,美国的肯普就发表了他的“证明”.

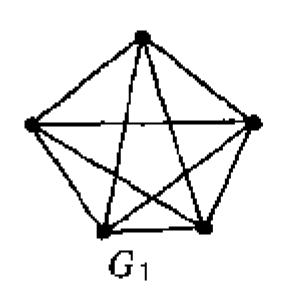
而第三年(1880 年),英国的泰特(P.G.Tait)亦不甘落后,又对四色猜想发起冲击,给出了猜想的另一个证明.

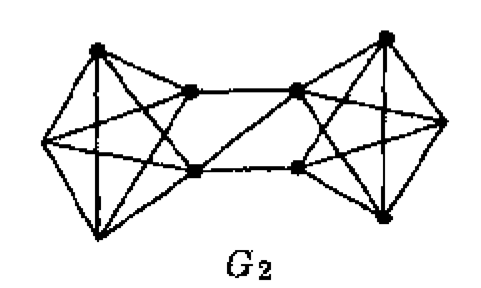
我们已经知道,肯普的证明被承认了 11 年之后,被希伍德的七页的论文所推翻.

泰特的“证明”寿命长一些,但仍没能经得住时间的考验,在它诞生后的 66 年,即 1946 年,由加拿大的数学家塔特(W.T.Tutte)动摇了它的根基.

为了叙述泰特的漏洞,我们先熟悉一些便于表达的图论术语.

从上面几节的叙述中,我们已经知道:在一个由顶点和边组成的图中,从某一个顶点引出的边数称为这个顶点的次数.如果在一个图中每一个顶点都是 k 次的,则这个图称为 k 正则图.例如,一个圈就是一个 2 正则图.对于一个连通图来说,怎样去衡量它的连通程度呢?我们不能采用生活中“紧密”,“非常紧密”之类的描述性词语,而必须采用定量的方法.我们将要使一个图 G 不连通或剩下一点所需要移去的最小顶点数,称为这个图 G 的连通度,记为 $\kappa(G)$.例如图 15-1 中 $\kappa(G_1)=4$, $\kappa(G_2)=2$, $\kappa(G_3)=1$.容易理解,一个图的连通度越大,它的各顶点之间的联结越紧密.





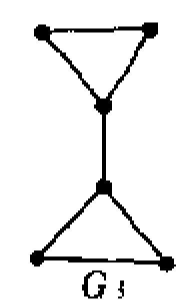


图 15-1

如果把一个图 G 的每个顶点作为一个城市，每一条边看作一条道路，那么从某一个城市出发，经过每一个城市恰好一次，能否回到原来出发的城市，将是一个有趣的问题．1859 年，英国的威廉·哈密顿爵士发明了一种游戏．用一个规则的实心十二面体，它的 20 个顶点标以著名的城市的名字，要求游戏者找一条路线，从某一城市开始，恰好经过每个城市一次，回到出发的城市，即“环绕世界”旅行．哈密顿以 25 个金币的价格把这一设计卖给一个玩具商．然而，玩具商吃亏了．这一游戏并不能引起人们多大的刺激和兴趣，因为它实在太容易了．我们把十二面体画在平面上，是如图15-2所示的一个图，不难看出，粗黑线所成的路线就是环绕世界的路线．我们把这种经过每个顶点恰好一次的环回路线称为哈密顿圈，具有哈密顿圈的图称为哈密顿图．

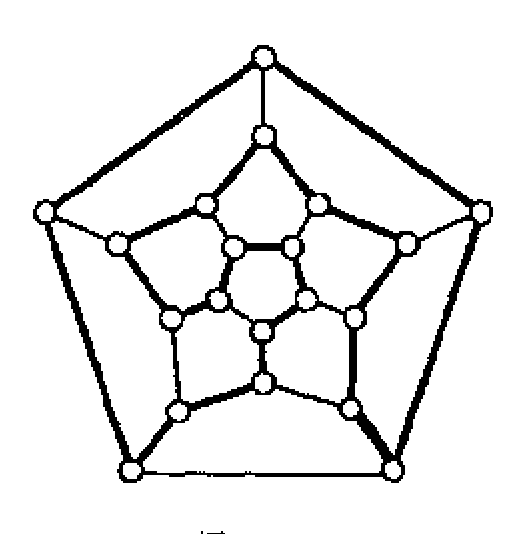
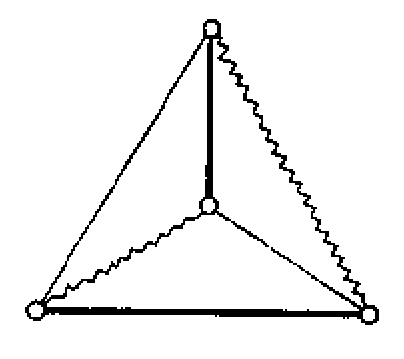


图 15-2

四色猜想，是一个区域的染色问题，它可以看作是图的面染色．当我们把地图转化为它的对偶图，则四色猜想可看作是平面图的顶点染色问题．泰特考虑把

一个图的边染色，即使一个图的每边染一种颜色，使有公共顶点的边（称为相邻边）有不同的颜色．这样的染色称为边染色．例如，图 15－3 就是用 3 种颜色（分别用粗实线，细实线和浪线表示不同的颜色）对一个 3 正则图作边染色．

为了叙述方便，我们把用 3 色对一个 3 正则图的染色称为泰特着色．



用 3 色对 3 正则图的边着色

图 15－3

1880 年，泰特猜想：每个 3 正则 3 连通平面图都有泰特着色．

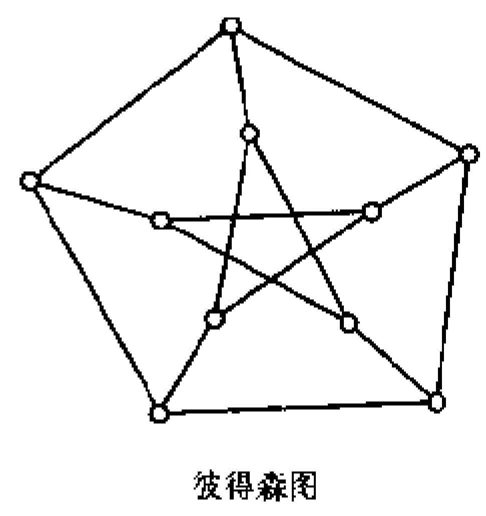
泰特的猜想并不是毫无依据的．他曾经对很多 3 正则 3 连通平面图作过试验，用 3 种颜色来染它们的边，使之相邻的两边不同色（泰特着色），都获得成功．图 15－3 是泰特猜想成立的一个极简单的例子．

当然，泰特猜想中对图要求的三个条件都不能减弱．

如果把"平面图"的要求去掉，那么猜想是不成立的．我们只需考察一个著名的图——彼得森图（图 15－4）．这是一个有 10 个顶点的 3 正则 3 连通图，但不是平面图．容易证明，它不存在泰特着色．否则，它的每个顶点引出的三边必有 3 种不同的颜色，而取其中两种色的边来看（不妨为红，蓝边），必在图中形成偶数个顶点的红蓝相间圈．这些圈包含了彼得森图的每个顶点恰好一次．但彼得森图不是哈密顿图，即无 10 阶（10 个顶点）的圈，故只能有一个 4 阶的圈和一个 6 阶的圈．但容易验证，彼得森图没有 4 阶的圈，矛盾．因此，彼得森图没有泰特着色．

泰特猜想中的条件"3 连通"也不能减弱为"2 连通"．我们只要把彼得森图稍为演变一下，就可以得到一个反例．图

15－5所示的图就是一个3正则2连通图，但它不存在泰特着色．否则，图中的粗实线的三边必须着同一色，这就等价于彼得森图存在泰特着色了．



彼得森图

图 15－4

至于泰特猜想条件中的“3正则”显然不能减弱为“2正则”．否则，这样的图就不是3连通而是2连通了——只要把一顶点相邻的两个顶点去掉，这个图就不连通．

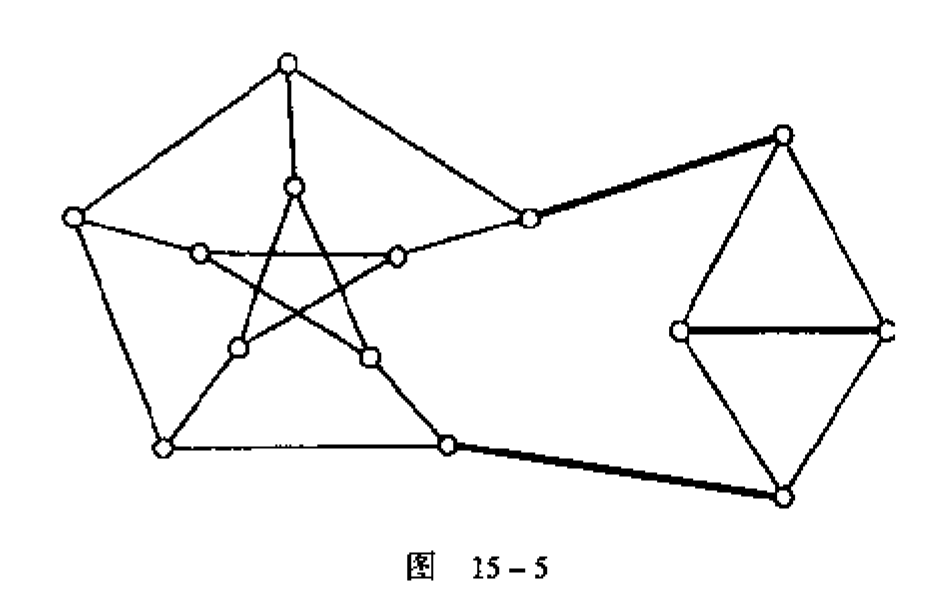


图 15－5

泰特越来越坚信自己的猜想是正确的．他进一步成功地证明了：

四色猜想与泰特猜想是等价的，即只要证得了泰特猜想就相当于证明了四色猜想．

于是，泰特着手去证明他的猜想，他首先证明了下列定理：

每个哈密顿的且 3 正则的图都有泰特着色.　　　　(15·1)

我们简述一下他的证明.

设图 G 是哈密顿且 3 正则图,它的顶点数是 n,边数是 m,则易知有关系

$$3n=2m,$$

故 n 必定是偶数.

因为 G 是哈密顿图,故 G 必有一个哈密顿圈 H,这个圈 H 一共有 n 个顶点,n 条边. 因为 n 是偶数,所以可用两种颜色去相间染色(图 15－6 用粗,细线表示). 又因为 G 是 3 正则图,所以从图 G 中去掉 H 圈,剩下的必是 $\frac{n}{2}$ 条互相无公共顶点的边,把这些边染第 3 种颜色(用浪线表示). 显然,这便是一种泰特着色. 于是,便证明了命题(15·1).

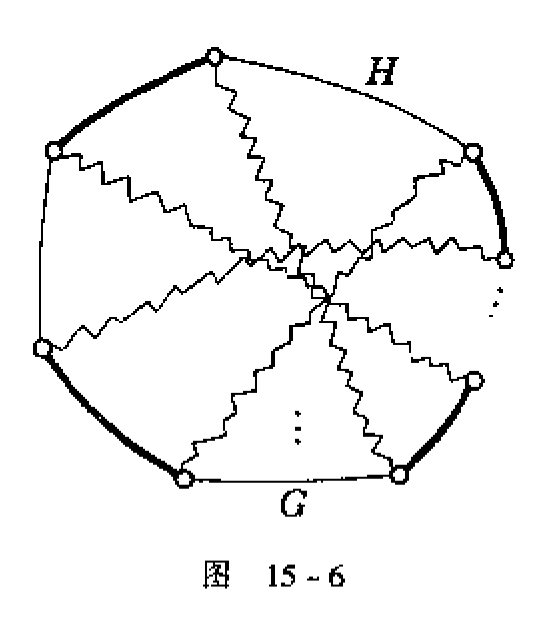


图　15－6

紧接着,泰特用下面的推理证明他的猜想.

因为每个 3 正则 3 连通平面图都是哈密顿图,　　(15·2)
每个哈密顿 3 正则图都有泰特着色(即 15·1),所以每个 3 正则3连通平面图都有泰特着色,泰特猜想成立,即四色猜想成立.

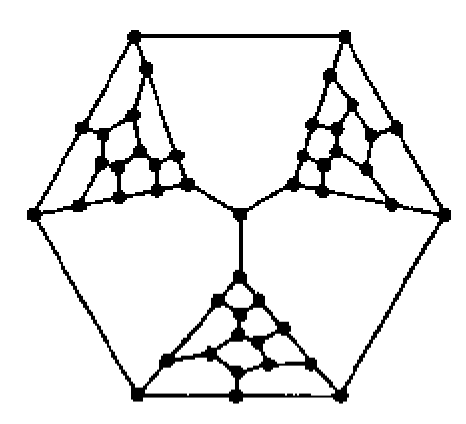
就推理过程来说,上面的每一步似乎都无懈可击.

可是,细心的读者会发现,泰特论证的大前提是一个未经证明,而仅是直觉上显然的命题. 问题就出在这个"显然"上!

半个世纪以后,1946 年,塔特用一个反例推翻了"每个3

正则3连通平面图都是哈密顿图”的假设．他作出了下面一个有 46 个顶点的平面图（图 15－7）．我们可以检验，这个图是 3 正则 3 连通的，但是却找不到一个哈密顿圈．当然，关于这一点，塔特也给予了数学上严格的证明．这个在数学史上有重要地位的图，称为塔特图．

泰特的尝试给数学家以有益的启示．19 世纪以后，不少数学家试图用证明四色猜想等价命题的方法来攻克这一问题．他们证明了很多与四色猜想等价的猜想．



塔特图

图 15－7

例如，1931 年，数学家惠特尼（H.Whitney）证明了：

四色猜想成立当且仅当每一个哈密顿平面图的顶点可 4 着色．

1943 年，哈德维格尔（H.Hadwiger）有一个关于图的顶点染色的猜想：

每一个连通的 n 色图可以收缩到完全图 K_n．

已经证明，这一猜想对于 $n \leqslant 4$ 成立．不久，人们发现，当 $n=5$ 时，哈德维格尔猜想等价于四色猜想．

……

为了解决这一难题，数学家们经历了多次失败．然而，他们的努力没有白费．研究四色猜想的意义已经逐渐超越了解决这一数学难题的本身．

数学家们顽强地前进，从一片没有开发过的地方开拓出一条条道路——四色猜想的探索，推动了图论的发展，催化了组合拓扑学的诞生．

§16　希伍德是人,不是神

1890年,当希伍德力排众议,在已有定论的四色猜想的证明中,挑出了人们不易察觉的隐患.虽然经过了一番努力,不论希伍德本人还是其他数学家,都没有能力很快地清除这个隐患,做出一个完满的证明来.

然而,希伍德没有就此却步,他凭借着数学家的敏锐,向自己提出了这样的一个问题:既然四色猜想是一个平面图的染色问题.那么,如果把这幅地图画在曲面上(事实上,真正的地图就是画在地球这个球面上的),对地图作相应的染色,将有什么结论呢?

我们知道,一个平面图的特征就是在保持顶点之间邻接关系的前提下,使它能铺在平面上而没有"交叉"的边(见§12).能够做到这点的图,叫平面图或可平面图,通常也称为可把这个图嵌入到平面上.当然,一个非平面图就不可能嵌入到一个平面上.

容易理解,一个能嵌入到平面上的图 G,也一定能够嵌入到一个球面上;反之亦然.这就是为什么在地球仪上的地图同样能保持邻接关系而绘制在一张纸上的道理.

我们来看5阶完全图 K_5,这是在§12中库拉托斯基定理所提到过的一个著名的不可平面图.

我们试着把它嵌入到平面(球面)上.请看图16-1,我们可以把该图(1)中的 K_5 的两条边 AC,AD 拉开(假定它的每边可以像橡皮筋那样伸缩),摆成图(2),但是,图(1)还有一边

BD 在图(2)中无从放置. 也就是说,在图(2)中,不论如何摆放 BD 边(可伸缩,但必须要从 B 连到 D),都不可避免地要和已经画好的边发生"交叉". 如果我们把所考虑的平面换成球面,结果也是如此.

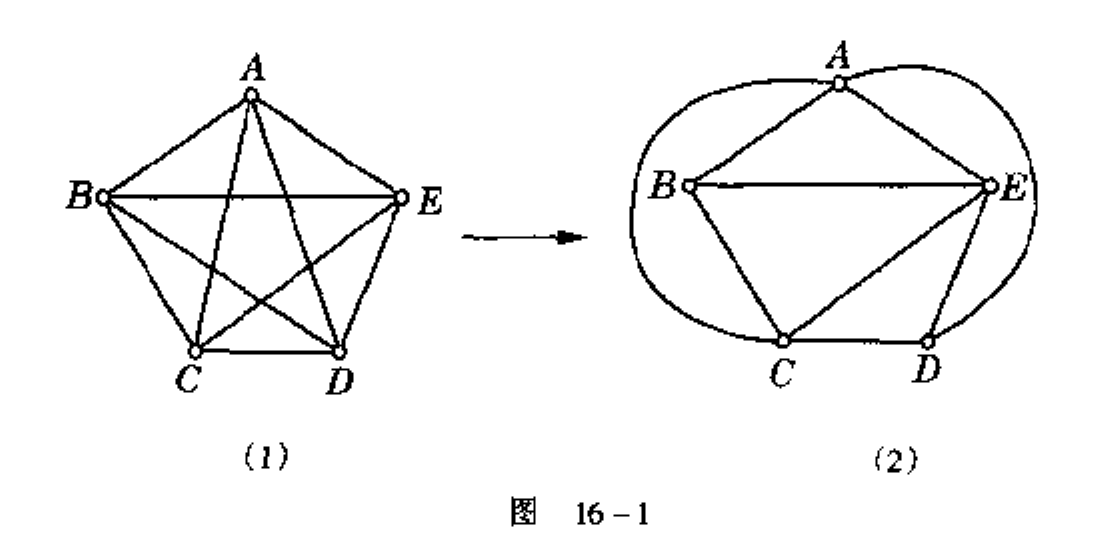


图 16-1

但是,如果我们在平面(或球面)上增加一条"手柄",如图 16-2 所示,那么图 16-1(2)中的边 BD,就能通过手柄画出来而毋须和已画出的边交叉. 换句话说,完全图 K_5 可以嵌入到一个带一个手柄的平面(球面)上.

当然,有些更复杂的图能被嵌入的曲面可能是一个球面带更多的手柄. 球面上附上手柄的个数,称为这种曲面的亏格. 自然,平面或球面的亏格为零. 我们将一个图 G 能被嵌入的曲面的最小亏格(即手

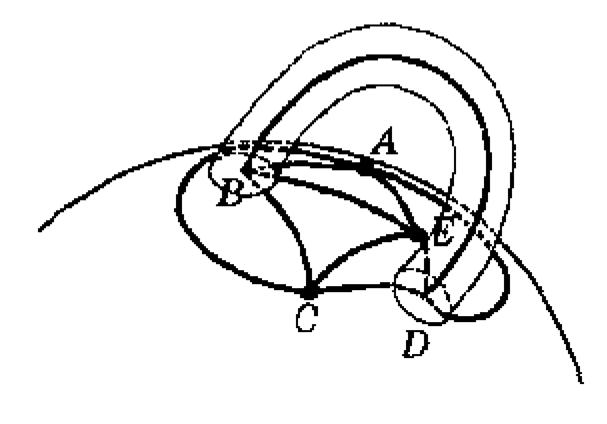


图 16-2

柄数)，称为图 G 的亏格，记为 $h(G)$. 例如，对于我们称为平面图的图 G 来说，$h(G)=0$，而 $h(K_5)=1$，$h(K_{3,3})=1$.

我们考察一下亏格为 1 的曲面. 如果我们把球和手柄(图 16-2)都看作是橡胶泥，那么我们可以在不改变点的邻接关系的前提下，把带一个手柄的球面搓成一个形如充气自行车内胎的圆环，如图 16-3(1)所示，数学上称这一变换为拓扑变换. 因此，通俗来说，亏格为 1 的曲面可看作有一个"洞"的曲面，而亏格为 2 的曲面是如图 16-3(2)所示的具有两个洞的曲面. 一般地，我们可以这样说：亏格为 h 的曲面拓扑等价于一个有 h 个洞的曲面，记为 S_h，$h \geqslant 0$. 有趣的是，一个嵌入 S_h 的图，若它有 n 个顶点，m 条边和 f 个面，则它们满足一个推广的欧拉公式 $n-m+f=2-2h$.

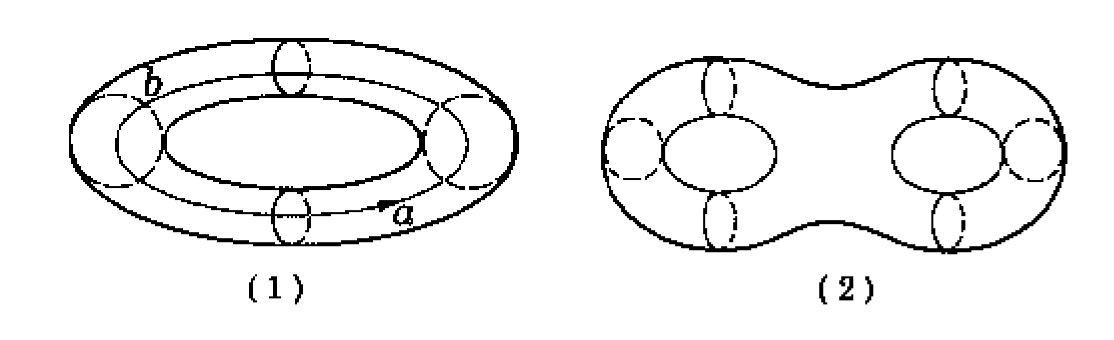


图 16-3

希伍德着手研究可以嵌入 S_h 中的图的染色问题. 对于一切能嵌入曲面 S_h 的图来说，能够对它的面进行染色(或顶点染色)，使它相邻的面(或相邻的顶点)有不同的颜色，所需的最小色数记为 $\chi(S_h)$.

我们不难看出，四色猜想就是：$\chi(S_0)=4$.

希伍德研究的问题，就是从 $\chi(S_0)$ 扩充到 $\chi(S_h)$($h \geqslant 0$). 他想：如果能求出 $\chi(S_h)$ 的表达式，那么作为特殊情形的

四色猜想就立即能够解决了.

希伍德的研究计划是这样的:要证明 $\chi(S_h)=m$,必须做下面的两个工作:

(1) 用逻辑推理证明 $\chi(S_h)\leqslant m$; (16·1)

(2) 在曲面 S_h 上画出一个地图 M(或它的对偶图),使得 $\chi(M)=m$,从而证明 $\chi(S_h)\geqslant m$. (16·2)

综合(1),(2)可证得 $\chi(S_h)=m$. 细心的读者可能马上记得起来,在证明拉姆赛数时,我们同样用过这一技巧.

在证明四色猜想的探索中,数学家们也是运用这一思路.

肯普用一个简单的例子(见图 12-3)证明了,$\chi(S_0)\geqslant 4$. 但可惜,在证明 $\chi(S_0)\leqslant 4$ 中出现了错误,只能证明 $\chi(S_0)\leqslant 5$. 于是,肯普的结论只能是 $4\leqslant\chi(S_0)\leqslant 5$.

希伍德考察一个被嵌入到曲面 S_h 的 n 阶 m 边的图 G. 他发现:如果图 G 加入一些边使它成为三角剖分(见 § 13)而不改变 G 的亏格,则其色数不会减少. 因此,在研究时,可以假定 G 是一个三角剖分.

设 G 的顶点的次数的平均值是 $\overline{d}$,面数是 f,则有

$$\overline{d}n=2m=3f,$$

即

$$m=\frac{\overline{d}n}{2},\ f=\frac{\overline{d}n}{3}. \tag{16·3}$$

由推广的欧拉公式得

$$n-m+f=2-2h. \tag{16·4}$$

把(16·3)代入(16·4)得

$$n-\frac{\overline{d}n}{2}+\frac{\overline{d}n}{3}=2-2h,$$

解得

$$\overline{d}=\frac{12(h-1)}{n}+6. \tag{16·5}$$

因为 $\overline{d} \leqslant n-1$,由(16·5)得

$$n-1 \geqslant \frac{12(h-1)}{n}+6,$$

整理得 $$n^2-7n-12(h-1) \geqslant 0.$$

解 n,取正根,得到

$$n \geqslant \frac{7+\sqrt{1+48h}}{2},$$

设 $f(h)=\frac{7+\sqrt{1+48h}}{2}$,

$$H(h)=[f(h)], \tag{16·6}$$

其中$[x]$表示不大于 x 的最大整数.

希伍德想:如果能证明 G 的顶点能用$H(h)$种颜色来染色,使之相邻顶点不同色,则 $H(h)$便是 $\chi(S_h)$的一个上界.

显然,若 $n=H(h)$,这种染色的存在不成问题,剩下的是考虑 $n>H(h)$的情形.由(16·5)得

$$\begin{aligned}\overline{d} &= \frac{12(h-1)}{n}+6 \\ &< \frac{12(h-1)}{f(h)}+6 \qquad (\text{注意,这必须 } h \geqslant 1) \\ &= f(h)-1. \quad (\text{因为 } f^2(h)-7f(h)-12(h-1)=0)\end{aligned}$$

这时,必有一个顶点 v 的次数$\leqslant H(h)-1$.从 G 中去掉点 v,所得的图记为 $G-v$.对 n 作数学归纳法,由归纳假设,$\chi(G-v) \leqslant H(h)$.于是,在 G 中,我们可以用 $H(h)$种颜色中的至多 $H(h)-1$ 种颜色去染 v 的相邻点,剩下至少还有一色可染 v 点.这便证得 G 可用$H(h)$种颜色作顶点染色.

于是,希伍德证得了

$$\chi(S_h) \leqslant H(h), \quad h>0. \tag{16·7}$$

希伍德猜想

$$\chi(S_h)=H(h),\quad h\geqslant 0. \tag{16·8}$$

当然,如果希伍德猜想成立,那么 $\chi(S_0)=H(0)=4$,四色猜想作为它的特例也成立.

希伍德知道,要证明 $h=0$ 的情形是异常困难的,但他有信心证明:$h>0$,希伍德猜想成立.于是,他着手证明

$$\chi(S_h)\geqslant H(h). \tag{16·9}$$

正如我们上述分析,要证出(16·9),只需在曲面 $S_h(h>0)$上给出一个地图 M,使 $\chi(M)=H(h)$即可.

首先,希伍德完成了 $h=1$ 的情形.他在环面($h=1$)上给出一个地图,使得它的色数是 $H(1)=7$.为了更清楚地表述出环面上的地图,我们把作出地图的环面沿两个方向剖开,如图 16－3 所示沿圆 a 和 b 剖开,形成图 16－4.

读者不难看到,在这个环面上(把图 16－4 的 a 线粘起来,则 b 成了圆筒的两端的两个圆,再把两个圆 b 粘起来,就成了一个圆环面)的地图,每一个六边形的“国家”都和六个“国家”相邻.因此,自然有

$$\chi(S_1)\geqslant H(1)=7. \tag{16·10}$$

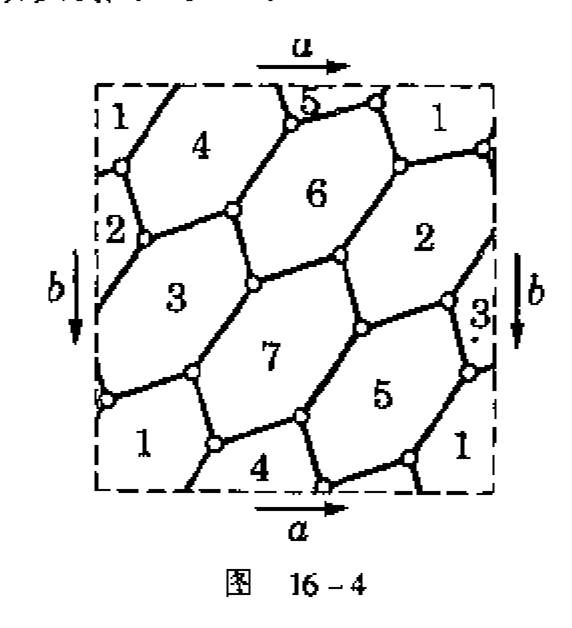


图 16－4

说到这里,可能有人会问:在平面上,正六边形可以填满平面,不是一样可以作出这样的一个图吗?(见图 11－2)不对!染色问题考虑的图是有限图,在图 16－3 中,一个由七个六边形组成的地图恰好填满环面,而在平面上,找不到有限个正六边形组成的地图,具有这样的性质:每个正六边形与其他

六个六边形相邻.

由(16·10)式和(16·7)式,希伍德成功地证明了

$$\chi(S_1)=7,$$

即在一个亏格为1的曲面上,要染一个地图,使它相邻两国不同色,至多要用7种颜色就够了.

这时候,希伍德缺乏了冷静的分析.他认为,证明(16·10)式的构图方法,能够轻而易举地推广到亏格大于1的曲面上去.他运用了这样的假定:凡适用于推广欧拉公式的曲面 S_h,必存在这样的地图 M,使

$$\chi(M)=H(h). \qquad (16·11)$$

于是,就在希伍德指出肯普对四色猜想"证明"错误的同一篇论文中,他宣布,已经成功地证明了

$$\chi(S_h)=H(h),h>0.$$

可是,希伍德是人而不是神,他指出了别人的错误,但是他自己也不是永远不会犯错误的.希伍德宣布了他成功后仅仅一年,数学家赫夫特(L.Heffter)就指出了希伍德论文中论证的几个错误.不久,人们发现,一个称为克莱因(Klein)瓶的亏格为1的曲面(图16-5)就不能嵌入一个色数为7的地图,尽管它满足推广了的欧拉公式.这就推翻了希伍德论证中的一个命题(16·11).在上面,我们论述过证明 $\chi(S_h)=m$ 的两个步骤,如果说肯普在第一步(16·1)犯了错误,那么,希伍德便是在第二步(16·2)犯了错误.

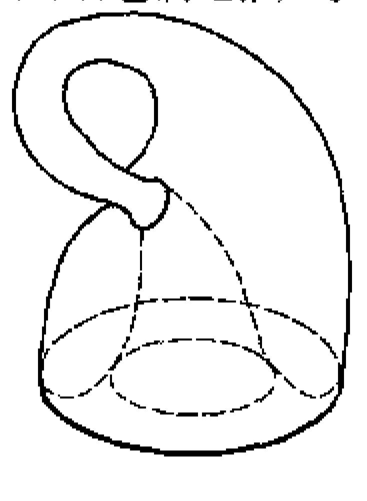


图 16-5

事实上,希伍德仅仅证明了

$$\chi(S_1)\leqslant H(h), \quad h>0$$

及

$$\chi(S_1)=H(1).$$

赫夫特接着证明了

$$\chi(S_h)=H(h),\quad h=2,3,4,5,6,$$

那么对于大于 6 的正数 h,上式是否成立呢? 这又是一个有趣的猜想.

经过了不少数学家 78 年的努力,美国数学家林格尔(G. Ringel)和扬斯(J. W. T. Youngs)在 1968 年,终于证明了这一猜想.

于是,希伍德的猜想(16·8)只剩下 $h=0$(即四色猜想)的情况未加论证.这真是数学中的怪现象.按传统的观念,更复杂的曲面(亏格 $h>0$)应当给研究工作带来更大的困难,可是,当 $h>0$ 的所有情形数学家都已证明了 $\chi(S_h)=H(h)$,但对于被认为是最简单的曲面即 $h=0$ 的球面(或平面),人们却对 $\chi(S_0)=H(0)$束手无策.

四色猜想是对人类智慧的嘲弄和挑战!

§ 17　成功了——用人脑也用电脑

历史发展到 19 世纪末，数学转向自身的完善，变得越来越抽象.整个数学大厦开始重建它的基础.几何，代数和变量数学建立了严谨的理论，使它们可以解决许多困难的问题.人们感到：任何能够用数学语言合理地提出的问题，都能用充分有力的数学思想来解答，并且相信：一个有能力的数学家可以在适当的时间内检验解答的正确性.四色猜想看来当然也属于这样的问题.数学家认为：他们没能解决这个问题，仅仅是因为还未研究出合适的数学工具.

然而，在 20 世纪初，数学的新成就使人们变得迷惘.

1931 年，奥地利数学家哥德尔（K. Gödel）证明了，在看来是最自然的逻辑系统中也存在着一些真实的命题，不能在这个系统中被证明为真或不真，而且系统中存在着一些陈述得相当简短的定理，但它最短的证明也长得无法在任何适当的时间内写下来.

四色猜想被研究了近八十年而没有取得成功的事实，使一些学者开始认为，也许它是一个既不能被证明也不能被否定的命题.而另一些研究者预感到，即使这个猜想能够证明，这个证明也会因为篇幅太长，步骤太繁而无法写出来.

然而，仍然有一批数学家相信，不可解性的"疾病"不会漫延到数学的这个领域中来，一个确定四色猜想是（Yes）（真）或（No）（伪）的巧妙的数学论证必将被发现.

数学家们找到了一条正确的道路，沿着肯普当年的思路

往前走——寻求一个由可约构形组成的不可避免的集合(见§13).而肯普当年试图建立的这个集合所包含的构形毕竟太少了——只由四个图组成(图13-2),因此,他遇到了无法克服的困难.

1913年,美国哈佛大学的伯克霍夫(G.D.Birkhoff)改进了肯普的约化方法,他证明了比肯普所考虑的构形更大一些的构形是可约的.麻省理工学院的富兰克林(P.Franklin)利用伯克霍夫的一些结果证明了任何少于22国的地图都可以用四色染色的.于是,把四色地图的国家数扩大,吸引了一群数学家的努力:

1950年,温(Winn)把22扩大为35.

1968年,奥尔(O.Ore)和斯坦普尔(G.J.Stemple)证明了少于40个国家的地图是可以用四色染色的.前一个数学家还为此写过一部专著《四色问题》.

1973年,米尔(J.Mayer)证明了,少于48个国家的地图是可以用四色染色的(他曾声称,他的方法可以推广到少于96个国家).

1974年,斯特朗奎斯(W.Stromquist)证明了,少于52个国家的地图是可以用四色染色的.

成果在不断扩大,但猜想的证明未有根本性的进展,即使对于一个相当大的国家数,四色猜想成立,还不能宣布证明了四色定理.虽然,这方面的工作已经证明了许多构形是可约的,但被证明为可约的所有构形的集合还远没有达到形成一个不可避免的构形集合.

汉诺威大学的数学家希西(H.Heesch)是在肯普以后,第一个公开宣布可以由找出一个可约构形的不可避免集来证明四色猜想的数学家.他在1936年就开始钻研这个猜想.1950

年,他估计,不可避免集内可约构形的数目大约为一万个左右.

希西的高明之处就在于,他突破了数学中传统的纸上绘图的方法,用一种新的形式来描述构形.首先,他把平面地图染色的研究转化为其对偶图——三角剖分(图 13-1)中顶点染色的研究.他把三角剖分看成一个电网,每一个顶点赋予电荷,然后用类似于在电网中移动电荷的方法来寻找构形的不可避免集.

由于牵涉到的专业知识太多,我们不可能也无必要在这本小书里详述这种“放电”方法.然而,我们可以用一个简单的例子,让读者从中略见希西思路的一斑.因为这是四色猜想能够成功地被用于机器证明的关键.

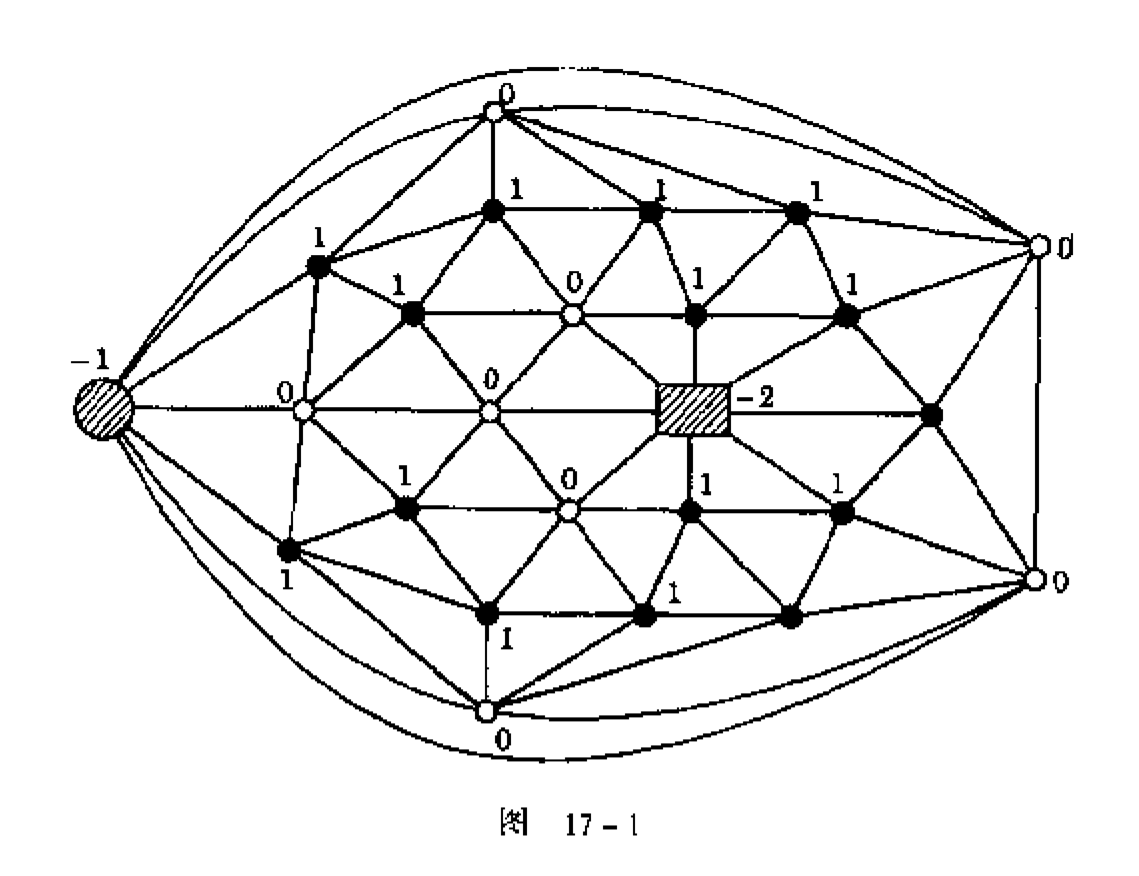


图 17-1

我们来看如图 17－1 所示的一个三角剖分图．它包含一个 8 次顶点（带斜线方块），一个 7 次顶点（带斜线圆点），8 个 6 次顶点（空心圆点）和 15 个 5 次顶点（黑色圆点）．肯普已经证明了 2 次，3 次，4 次的顶点是可约的，也就是说，它们不可能出现在最小五色地图中（即图 13－2 的（1），（2），（3）情形）．所以，为了证明不存在最小五色地图，仅需要考虑那些仅含 5 次和 5 次以上顶点的三角剖分图．若对每个 d 次顶点赋以电荷数 $6-d$（见图中顶点旁阿拉伯数字），则次数大于 6 的顶点被赋以负电荷，只有 5 次点得到正电荷．

设三角剖分图的顶点数为 n，边数为 m，面数为 f，各顶点的次数为 $d_i, i=1,2,\cdots,n$，则有

$$3f=2m.$$

又由欧拉公式有

$$n-m+f=2,$$

故由上述两式得

$$m=3n-6.$$

于是，得总电荷数是

$$\sum_{i=1}^{n}(6-d_i)=6n-\sum_{i=1}^{n}d_i=6n-2m=12.$$

这一结论表明：任何三角剖分图中所赋的电荷数之和恰为 12．这个结果的重要性不是在于 12 这个数字，而是电荷之和为正数意味着每个这样的平面三角剖分内都有正电荷（即 5 次）的顶点．

希西的基本思想是先用电网中移动电荷的方法来寻找构形的不可避免集，然后用一个他设计的程序在计算机上判断这些构形的可约性．

我们先看第一步，他的做法是重新分配不含低于 5 次顶

点的任意三角剖分的正电荷.由于每幅地图中总有正电荷,所以选择出现在正电荷邻域的每种类型中的构形,就可以形成不可避免集.

让我们举一个简单的例子说明这种放电过程.

把$\frac{1}{5}$单位电荷从每一正电荷顶点(5 次顶点)移到它的每个负电荷邻点上去.

在这个过程中,一个 5 次顶点要保持带正电荷,仅当它的邻点至少有一个次数不大于 6(即不带负电荷),即只能是图 17-2 中的(1),(2)两种构形.在图(1)中,5 次点 A 与一个 5 次点 B 相邻,在图(2)中,5 次点 A 与一个 6 次点 B'相邻.

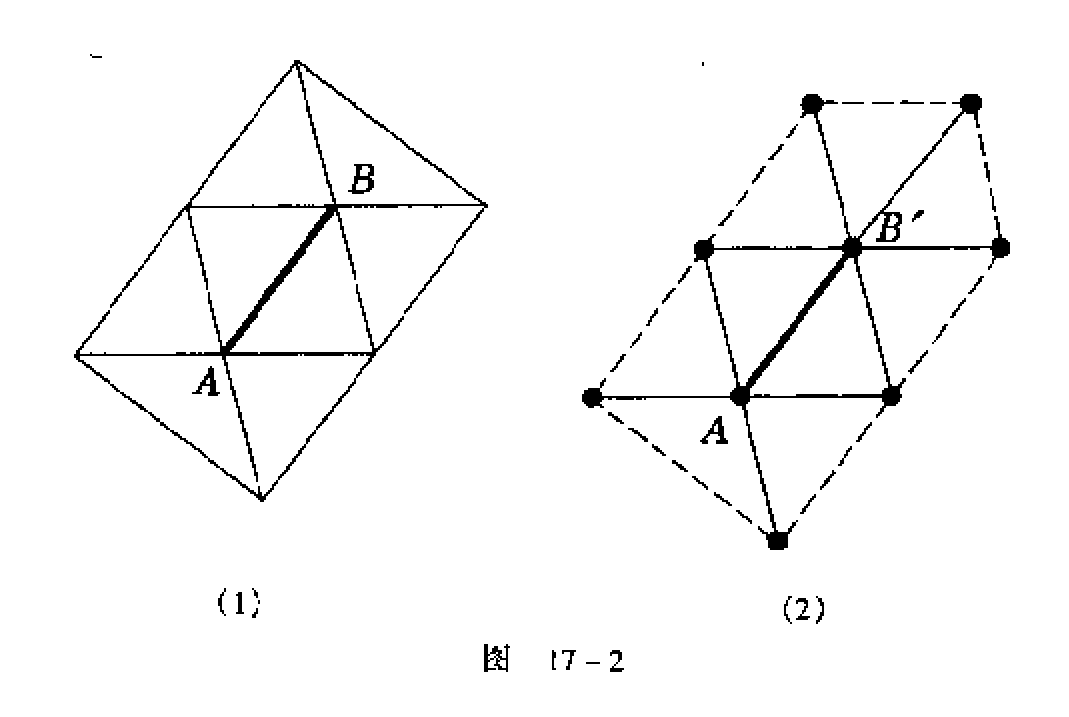


图 17-2

一个 6 次顶点永远不会变成带正电荷的,因为它的初始电荷为 0,决不会接受正电荷.

一个 7 次顶点,仅当它至少有 6 个 5 次邻点时,最后才带正电荷(因为 $6\times\frac{1}{5}+(-1)=\frac{1}{5}>0$),而这时,其中至少有两

个 5 次点是相邻的(图 17 - 2(1)).

一个 8 次或更高次数的顶点,即使它的全部邻点都是 5 次顶点,也不可能变为正的.这可以通过简单的计算证明出来:设顶点的次数是 $d \geqslant 8$,它的电荷数是 $6-d$,则它能接受的最大正电荷数是$\frac{1}{5}d$,于是,过程结束时所带的电荷至多是 $(6-d)+\frac{d}{5}=\frac{30-4d}{5}<0$(因为 $d \geqslant 8$).

由上面分析可知,这个放电过程产生的不可避免集由两个 5 次的顶点组成,其中一个由一条边连到另一个 5 次顶点上(图 17 - 2(1)),另一个由一条边连到一个 6 次顶点上(图 17 - 2(2)).

当然,如果把放电过程改变为:把$\frac{1}{3}$单位电荷从每个正电荷顶点移到负电荷邻点上去,那么就可以产生如图 17 - 3 所示的不可避免集.

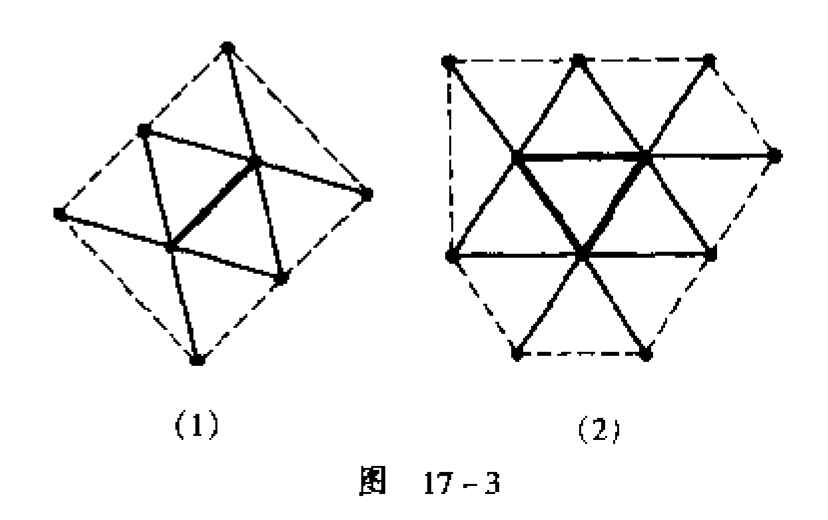


图 17 - 3

尽管希西已经设计了一个计算机程序,能够用来验证构形的可约性.但是,这种验证需要计算机计算相当长的时间,每个大约需要 100 小时.按照他的估计,要验证的构形约为

1000个.即使撇下储存问题不理,光是计算也得花上100年左右!前景依然渺茫.

1972年,美国伊利诺斯大学两位年青的数学家阿佩尔和黑肯研究这个问题.他们一开始就意识到,用目前的方法,不辅以计算机是得不出证明的.于是,他们一方面在希西约化理论的基础上继续简化问题,另一方面利用计算机的试算和人机对话以获得有益的信息,其目的是希望进一步缩减不可避免集中的构形的个数,使证明可约性所需的计算机时间降到可以接受的程度.

1976年1月阿佩尔和黑肯开始用新的放电过程来构造不可避免集,他们把不可避免集中构形的个数缩减至1482个,在IBM360计算机上用了1200小时一一验证了它们都是可约构形——即不可能有最小的五色地图.1976年6月,他们在《美国数学会通报》上宣布:四色定理被证明了.

1977年,阿佩尔和黑肯的论文《每个平面地图都可以四着色》在美国《伊利诺斯数学杂志》上发表,全文长139页,还附上电子计算机程序的微形胶片400页!

一个困惑了人类一百多年的数学难题被解决了——这不但依赖人脑,还依赖电脑.1978年,从美国伊利诺斯州寄出的信上都盖上了一个"Four colors suffice"(四种颜色就够了)的邮戳.这一惊人的消息传遍了全世界!

四色猜想,历史上每一次宣布被证明了以后,都引起了一场轩然大波,这一次能例外吗?

§ 18　证明仍在继续

1977 年，几乎在证明四色猜想的长篇论文发表的同时，阿佩尔和黑肯为著名的科学杂志《科学美国人》撰写了一篇题为“四色地图问题的解决”的文章，他们写道：

“1976 年我们解决了四色问题. 格斯里的猜想从数学上被证明了，但所用的方法却完全不是他所能料想到的. 由于在证明过程中无先例地利用了计算机，以致在当代数学家中也有一些人因为不了解导致证明的发展过程，对这个结果颇感惊愕. 证明时进行的计算比通常认为能够接受的还要长. 实际上，没有计算机的帮助是无法检验这个证明的正确性的. 而且，证明中的一些关键思想是由计算机的实验来完善的. 当然，将来某一天，四色定理的简短证明可能会被找到，也许是被哪个聪明的中学生所找到. 但是我们也可以设想不可能存在这样的证明. 在这种情况下，就出现了一类新的有意义的定理，无法用传统形式证明的定理.”

阿佩尔和黑肯的工作意义已经超出了证明一个数学难题本身，它告诉人们——研究数学和不懂数学的人们——计算机不仅仅可以用来计算，它还可以用来作为数学上的逻辑证明. 有理由相信，在数学的浩如烟海的问题中，一定存在一些用人有限的生命所无法应付的命题，它需要用计算机去帮助解决. 四色定理的机器证明，标志着数学家仅靠一支笔，一张纸去探索世界的时代即将过去，代之而来的将是数学家的智慧与计算机的操作相结合的时代.

在阿佩尔、黑肯关于四色定理已被解决的消息宣布的那一刻开始,一次震动,一片惊讶,随之就是数学家们冷静的思考……

阿佩尔、黑肯的方法本质上是一种“穷举检验法”,他们对1482个构形作了可约性的检验,繁复的证明让人有理由怀疑它的严谨性.当阿佩尔、黑肯的论文刚一发表,著名的概率论专家杜勃(Doob)就曾断言:“只要你随机地翻开这篇数学论文,在两页之内一定能发现其错误.”他甚至向黑肯打赌:“五个月内一定能发现其错误”.而这位年青的数学家黑肯冷静地回答:“那么,我在两星期内一定能改正这个错误.”

阿佩尔和黑肯也意识到,一个长达400页的计算机程序很可能会出现错误,但是他们有信心去克服这种错误.他们把在证明中的错误分为三类:第一类是花几分钟就能改正的;第二类是花几小时就能改正的;第三类则是要花几天才能改正的.

1981年,施密特(V.Smiter)博士在他的学位论文中用手算检验了阿佩尔和黑肯的论文中的40%论证,发现了有14个一类错误和一个三类错误.当然,这些都是能加以修正的错误.

阿佩尔和黑肯的计算机证明需要耗费1200小时的计算机时间,让人望而生畏.1977年,在一次数值数学与计算机会议上,有人又宣布了一个比较简单的证明,但也要用去50小时.一个不能核验的论证不能算是一个证明.四色定理的机器证明,只能通过独立的计算机程序来校验.

一些数学家站出来讲话了.他们反对把计算机当作标准的数学工具.理由是:如果一个论证的全部或部分不能用人工计算来复核的话,这个证明是没有说服力的.数学家不相信计

算机，这在历史上已有过教训了. 1961 年，有人声称借助于电子计算机找出了一个不可避免集，其中的构形全是可约的，从而证明了四色猜想. 但不久，数学家惠特尼和塔特（见 § 15）分别独立地发现这一证明是错误的，原因是计算机误算了一个构形的可约性. 天啊！计算机也会出错！今天，面对阿佩尔和黑肯的计算机证明过程中 200 亿个逻辑判断，几万步程序和 1200 小时的运行，谁能保证不发生错误呢？是的，这一证明确实经过了计算机独立程序的校核，但是，难道检验的机器就不会发生错误吗？

当然，阿佩尔和黑肯也没有保持沉默，他们申辩道：人工复核当然是最好的方法，但即使在人工复核为可能的时候，如果证明很长并且计算繁复的话，那么，很难相信人工校验会把一切错误的可能性排除无遗. 事实上，用计算机校验比手算校验更为有效，而且更为准确. 为什么我们仅仅承认手算的证明. 人的计算能力真的是这么可靠吗？如前所述，1968 年，奥尔关于 40 个国家以下的地图可用四种颜色染色的证明，尽管用很简练的文笔撰写，也花了超过 100 页的篇幅，那么谁从头到尾认真复核过他的证明？即使复核过，谁又能保证，被那冗长证明折磨下的人脑出现错误的可能性为零呢？

电子计算机的出现和应用向我们提出了一个重要的问题：什么叫做数学证明？要不要把像四色定理这样一类用计算机证得的结果看成既不是"猜想"，也不是"定理"的中介物？国外，有人建议把它称为"阿克奴格廉斯"（agnograms）.

今天，仍然有一批专业的和业余的数学家（据说还有社会科学家）顽强地在寻找四色猜想或其等价命题的非机器证明. 据说，有些已取得或接近取得巨大的成功. 著名数学家哈拉里说："四色猜想真可以改名叫'四色病'了. 因为它真像传染病

一样，很容易传染．有时是良性的，有时却是恶性或慢性的．还没有发明一种预防针可对付这种病，但一个人的体格如果足够强壮，那么稍一感染就可以有终身免疫力．这种病会反复发作，虽然还没有致死的记录，但已经知道它会使人痛苦非凡．这种病至少已经观察到一次它从父亲传染给了儿子，所以它也许是会遗传的．”

我们衷心希望，不久的将来，四色定理的一个精采的、简明的逻辑证明被成功地发现．但是，“体格未够强壮”的读者小心患上“四色病”！

不管如何，四色定理被电脑成功地证明，推动了一门新兴科学——机器证明的发展．正如阿佩尔、黑肯所说的：“我们相信，一定存在很有数学意义而只能用计算机方法来证明的定理．即使四色定理不是这样的一个问题，它也已提供了一个很好的例子来说明，为了证明这种定理可能需要做些什么．”

四色定理被机器证明后的十二年，1988 年 12 月，加拿大康哥迪亚大学的林永康(Clement Lam)教授领导的小组宣称他们用 CRAY-1S 型超级电脑花了整整三年中的数千小时计算机时间成功地解决了一个世界难题——证明了不存在 10 阶的有限射影平面．

机器证明又一次显示了它的威力．

数学界经受了又一次震动……

结 束 语

从游戏到数学，这是人类认识世界从感性到理性的飞跃.

染色，在生活中我们感到五彩缤纷，在游戏中，我们觉得变幻无穷，然而，在数学家的眼中，它是一种集合的分类，组合关系的变换.

在人们探索真理的历程中，染色，从一种种有趣的智力游戏，理论化为一门艰深的数学.

跟随着几代数学家们的思路，我们跨山涉水，分享了探索真理的喜悦.抬头远眺，一座座更高的山峰，更宽的激流，还横亘在我们的前头.

在这本小册子里，我们讲述了图上边的染色，点的染色，面的染色等，回顾了拉姆赛的发现，厄尔多斯的天才，范德瓦尔登的巧思，肯普的失误，泰特的尝试，希伍德的贡献，……我们仅仅摘取了这一数学分支上的几朵小花，没有也不可能描述它的全部.遗憾的是，在这本大谈染色的小书里，却看不到一个色彩斑斓的插图.

在这里，每一个有趣的故事都是历史真实的记录，每一个问题的解决都铭刻着数学家们前赴后继的努力，每一个成功的后面都经历过一连串的失败，每一个公式都蕴含着呕心沥血的艰辛，……

年青的拉姆赛，福克曼过早夭亡；年老的厄尔多斯七十高龄还在数学的王国中驰骋.肯普失败了，泰特继续冲击，希西失败了，阿佩尔和黑肯踏着前人架起的阶梯，登上了光辉的顶

点.探索真理的征途多么艰辛!

不要听信文学作品中的描述,数学家大多数不是怪人.不要误听某些哲人的胡诌,数学不是符号的游戏.数学是刻画客观世界空间形式和数量关系的科学.世界是美丽的,数学也是美丽的,它是一首和谐,优美的诗,当然,这是一首不大容易读懂的诗.

读完这本小书,不要仅仅记住那些传奇的故事,津津乐道数学家的伟绩,在作者这些并不高明的文字沙砾里,你能发现数学家们分析问题,解决问题的思路的闪光吗?

从游戏到数学,从一支笔一张纸的数学到与计算机结合的数学,数学的思维,数学的方法也在发展.著名数学家乌拉姆(S.Vlam)说得好:"如果旧日的数学可以看成好比是辛苦费力的工笔画,那么未来的数学将是一幅更为生动,更为变化多彩的图景."

不管我们手中的工具如何发达,实验室中的工具如何先进,数学,永远需要坚实的基础,巧妙的思维,数学,永远需要你勇于探索,锲而不舍的精神.

在结束本书的时候,让我们重温一下著名数学家希尔伯特(D.Hilbert)在20世纪初的那句箴言:

"我们必须知道,而且一定会知道."